

UM RESGATE HISTÓRICO DOS FRACTAIS: EVIDÊNCIAS, ESTUDOS E CONSOLIDAÇÃO DE UMA ÁREA CIENTÍFICA

A HISTORICAL RESCUE OF FRACTALS: EVIDENCE, STUDIES, AND CONSOLIDATION OF A SCIENTIFIC AREA

Guilherme Oliveira Santos¹

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1298-1833>

Mariana Moran²

Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8887-8560>

Lucieli M. Trivizoli³

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3660-6181>

Resumo: Este artigo apresenta um recorte de uma pesquisa de mestrado que investigou o processo de constituição da Geometria Fractal como área científica, buscando compreender como seus elementos conceituais e sociais se estruturaram ao longo do tempo. O estudo analisa as primeiras manifestações de objetos fractais, o processo até a formalização do termo por Benoit Mandelbrot, em 1975, bem como desdobramentos na pesquisa após essa publicação, situando essas produções no contexto histórico e científico em que emergiram. A investigação fundamenta-se na perspectiva historiográfica proposta por Saito (2015), articulada aos sistemas conceitual e social de Bazi e Silveira (2007) e Toledo (2008), os quais orientam a análise dos componentes que conferem identidade e legitimidade a uma área científica. Metodologicamente, adota-se a pesquisa documental, com levantamento e estudo de teses, dissertações, artigos, biografias e produções de matemáticos que contribuíram para a consolidação dessa geometria, complementados por dados de repositórios científicos internacionais. Os resultados indicam evidências da constituição da Geometria Fractal, especialmente quanto à base formal, à base específica e ao domínio do campo, embora alguns aspectos sociais — como sociedades científicas e agências de fomento voltadas à área — ainda careçam de fortalecimento.

Palavras-chave: História da Matemática. Historiografia. Geometria Fractal. Constituição de Área Científica.

Abstract: This article presents an excerpt from a master's thesis that investigated the process of establishing fractal geometry as a scientific field, seeking to understand how its conceptual and social elements have been structured over time. The study analyzes the first manifestations of fractal objects, the process leading up to the formalization of the term by Benoit Mandelbrot in 1975, as well as developments in research after this publication, situating these productions in the historical and scientific context in which they emerged. The investigation is based on the historiographical perspective proposed by Saito (2015), articulated with the conceptual and social systems of Bazi and Silveira (2007) and Toledo (2008), which guide the analysis of the components that give identity and legitimacy to a scientific field. Methodologically, documentary research is adopted, with a survey and study of theses, dissertations, articles, biographies, and works by mathematicians who contributed to the consolidation of this geometry, complemented by data from international scientific repositories. The results indicate evidence of the constitution of Fractal Geometry, especially regarding its formal basis, specific basis, and field domain, although some social aspects—such as scientific societies and funding agencies focused on the area—still need to be strengthened.

Keywords: History of Mathematics. Historiography. Fractal Geometry. Constitution of Scientific Area.

¹ Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Professor da Rede Estadual e da Rede Privada de Ensino. Nova Esperança, Paraná, Brasil. E-mail: prof.guilherme.o.s@gmail.com.

² Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Maringá, Paraná, Brasil. E-mail: mmbarroso@uem.br.

³ Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. E-mail: lutrivizoli@gmail.com.

O INÍCIO

Ao refletirmos sobre a Geometria, é possível reconhecer relações entre esse campo do conhecimento e o cotidiano. Os objetos que nos cercam apresentam formas que remetem aos entes geométricos, assim como diversos elementos da natureza evidenciam propriedades associadas à Geometria, especialmente à Geometria Euclidiana. Ao observar, por exemplo, uma tábua de madeira, podemos identificar visualmente configurações que se aproximam de retângulos ou blocos retangulares, estabelecendo correspondências entre o que vemos e o que estudamos de modo teórico. No entanto, diante de certas formas — como o contorno de um litoral, as ramificações do pulmão humano ou o interior de um repolho —, embora seja possível recorrer a elementos da Geometria Euclidiana para descrevê-las, a correspondência entre a representação e o objeto real revela-se limitada.

Quando olhamos para objetos, como esses destacados, é possível relacionarmos à perspectiva da Geometria Fractal, nos atentando a esse aspecto de proximidade, conseguimos evidenciar suas características, em particular as irregularidades e fragmentações presentes em diversos graus e níveis de complexidade (Mandelbrot, 1982; Barbosa, 2005; Carvalho, 2020). Contudo, essa Geometria vai além de representar elementos da natureza de forma mais adequada.

A Geometria Fractal se desdobra também sobre os estudos relacionados à ciência do Caos, de modo que fornece ordem e padrões em espaços onde havia apenas o irregular, o aleatório e o imprevisível (Barbosa, 2005). Para além disso, em estudos de elementos que apresentam regularidades em suas irregularidades, como a Biologia, a Física, a Economia, a Engenharia, a Astronomia, a Meteorologia, a Fisiologia, entre tantas outras, a Geometria Fractal consegue descrever e representar de forma satisfatória fenômenos e objetos, auxiliando seu estudo e aprofundamento.

Essa ciência trouxe consigo *o ver ordem e padrões*, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o *caótico*. Entretanto, nota-se que o Caos colocou elos entre temas não relacionados, justamente pelas suas irregularidades. [...] [os temas] eram estudados buscando-se então ligações entre diferentes tipos de irregularidades; e surpreendentes ordens no caos foram descobertas (Barbosa, 2005, p. 10).

Um marco do início dessa geometria, segundo Barbosa (2005) e Carvalho (2020) é a publicação do livro *Objetos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão* de autoria de Benoit Mandelbrot e publicado no ano de 1975. Assim é possível inferir que se trata de uma área recente e que ainda necessita de investigações e discussões na comunidade científica. Nesse

sentido, como essa área está localizada dentro da Matemática? Quão madura, estruturada e consistente se configura essa área? Que elementos são e são importantes para essa área? Como podemos entender seu desenvolvimento?

Nesse sentido trazemos aqui uma discussão sobre a Geometria Fractal a fim de elencar e compreender elementos referentes à sua constituição como área científica, resultante de um recorte de uma pesquisa de mestrado, cujo objetivo foi investigar os processos de constituição, institucionalização e consolidação dessa Geometria como área científica. Quando nos referimos à constituição, a compreendemos como uma etapa inicial de formação, em que se organizam os primeiros elementos conceituais e sociais que permitem o reconhecimento de um novo campo de saber. Para tanto, adotamos como referência os componentes apresentados por Bazi e Silveira (2007) e Toledo (2008) e buscamos reconhecer, utilizando documentos e produções científicas, indícios desses componentes no contexto da Geometria Fractal por meio da historiografia.

TIPIFICANDO HISTORIOGRAFIA

Adotamos a História da Matemática como campo investigativo, conforme Miguel e Miorim (2002) e Trivizoli (2016), entendendo que o estudo histórico não se limita a datar fatos, mas a compreender processos e contextos que envolvem a produção do conhecimento matemático. Nesse sentido, são considerados os mais diversos elementos, ações, relações e aspectos que abarcam e influenciam ao longo da história na atividade matemática.

Assim, entendemos a história como sendo um elemento essencial para a compreensão de processos referentes à criação, desenvolvimento e uso de teorias e práticas matemáticas, cada qual em seus respectivos contextos (Struik, 1985). Então, olhar para o passado nos auxilia a compreender o presente, possibilitando entender caminhos e processos percorridos ao longo do tempo, considerando que uma de suas finalidades é:

[...] situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução (D'Ambrosio, 2021, p. 46).

Com esse entendimento, é preciso pensar a história além de elencar fatos, personagens e datar momentos, buscando apontar e discutir elementos significativos e pertinentes a determinado assunto estudado, como fatores e contextos que conduziram e direcionaram a atividade humana naquele período em específico.

Ademais, Saito (2015) compreende que, por meio da História da Matemática, temos a possibilidade de esmiuçar, refletir e debater diferentes vertentes, ideias, pontos de vista e processos referentes à certa temática investigada. Consequentemente, não há uma história única e absoluta referente a um fato, mas sim produções que emergem de diferentes vertentes.

Podemos então falar em historiografia, como sendo a escrita da história, nos levando a considerar que não estamos isentos de carregar certa parcialidade nas produções historiográficas. Assim não há total neutralidade na produção, sendo influenciada por fatores contemporâneos ao autor que a escreve, e isso deve ser considerado ao se estudar trabalhos sobre a temática desejada.

Nossa proposta é seguir a historiografia atualizada apontada por Saito (2015), como uma perspectiva que tem por objetivo tratar tanto do conteúdo matemático em estudo, quanto dos documentos que abordam sobre o tema e que são advindos dos mais diversos campos de conhecimento. Cabe ao historiador utilizar-se desses elementos, estabelecer laços e relações entre os dois, a fim de fazer “[...] emergir do próprio histórico novas questões que dão acesso ao que são ‘conhecimento matemático’ e ‘matemáticas’ do passado” (Saito, 2015, p. 28).

Dessa forma, compreendemos que nessa perspectiva historiográfica, Saito (2015) aponta elementos que orientam o estudo tanto do conteúdo matemático quanto dos documentos que tratam desse conteúdo, considerando suas relações com os contextos em que foram produzidos e as personas envolvidas nesse processo. Assim é possível realizar um estudo histórico de forma a levantar, estudar e relacionar elementos para a compreensão do processo de constituição da Geometria Fractal. Passemos então à discussão do que entendemos por constituição de uma área científica.

A CONSTITUIÇÃO DE UMA ÁREA CIENTÍFICA

Para falarmos em constituição de uma área científica, Bazi e Silveira (2007) e Toledo (2008) apontam dois sistemas: o conceitual e o social. Esses sistemas referem-se a processos que constroem e legitimam os espaços de atuação, elemento esse que permite a uma área adquirir um estatuto científico. É preciso pensar em um arcabouço teórico, metodológico e temático que subsidie essa área, assim como pessoas e instrumentos capazes de disseminar essas informações.

Esse arcabouço que fundamenta, orienta e limita as atividades de pesquisa de uma área científica, se refere ao Sistema Conceitual composto pelos seguintes componentes:

- uma base filosófica ou visão geral constituída por suposições gerais acerca do mundo, do conhecimento e da boa conduta;
- uma base formal constituída por teorias lógicas, matemáticas e explicativas;
- uma base específica formada por teorias, hipóteses e dados obtidos de outros campos de pesquisa;
- um fundo de conhecimento, representado pelo corpo de conhecimentos obtidos pelo campo em outras épocas;
- um domínio constituído por objetos claros e precisos que se referem ao fundo de conhecimento;
- a problemática, formado pelo conjunto de problemas abordados pelo fundo de conhecimento;
- o objetivo, ou seja, o conjunto de metas de pesquisa; e
- a metódica, ou os métodos regulares utilizados na abordagem dos problemas e objetos, à luz dos objetivos (Bazi; Silveira, 2007, p. 131-132).

É importante destacar que esse conjunto de componentes não é estático, mas passa por constante reformulação já que sempre é agregado por novas pesquisas e estudos. Destaca-se também que uma vez se estrutura a base formal e a base específica de uma área científica nesse sistema, entende-se que o processo da Constituição ocorre dentro de uma comunidade em questão.

Enquanto o Sistema Conceitual se refere ao arcabouço, cabe ao Sistema Social disseminar o que é produzido de conceitos, teorias e conhecimentos dessa área científica. É a partir dessa propagação que se expande e se avança os saberes gerados. Toledo (2008) destaca quatro componentes principais: os cursos universitários (graduação e pós-graduação), as sociedades profissionais e acadêmicas, as agências de fomento, os periódicos e eventos científicos.

Destaca-se ainda que esses dois sistemas ocorrem de forma interdependentes: quando o Sistema Conceitual se modifica, é necessário que o Sistema Social divulgue e movimente essa modificação, para que seja discutida pela comunidade, possa ser refletida e ponderada, voltando ao Sistema Conceitual que se altera, mais uma vez, a partir desses debates e pesquisas.

Dessa forma, nossa pesquisa se debruçou em pesquisas, documentos e informações referentes à presença dos fractais antes mesmo de sua formalização, até o momento em que Mandelbrot publica seu livro em 1975, dando nome e forma a esses objetos, de forma a discutir elementos referentes ao Sistema Conceitual. Já com relação ao Sistema Social, buscamos através de um repositório online compreender as publicações, eventos científicos, periódicos e relações com cursos de graduação e pós-graduação. Destacamos que não foi possível identificar a partir do repositório questões referentes a sociedades e agências de fomento voltadas especificamente para a Geometria Fractal.

CAMINHOS PERCORRIDOS

Pela perspectiva adotada para a pesquisa realizada e pelos objetivos já destacados, compreendemos que a pesquisa documental foi uma opção pertinente para o levantamento e estudo de elementos a serem identificados como componentes do processo de Constituição. Entendemos essa pertinência, por compreender que a pesquisa documental forneceu materiais que possibilitaram um estudo histórico, social, cultural e contextual de certo objeto em questão, uma vez que nos deparamos com indícios e informações que corroboraram com o entendimento historiográfico desejado.

Baseados em Cervo, Bervian e Silva (2007) e Fontana e Pereira (2021), consideramos *documento* como sendo todo tipo de material que possua registros (físicos, digitais, textuais, pictóricos, audiovisuais, entre outros), estes que possam ser consultados com o objetivo de investigar, estudar e compreender aspectos relacionados a contextos, desdobramentos, relações e proximidades à temática centrais. Baseados nesses referenciais, realizamos o levantamento e estudo de materiais que abordavam elementos referentes a esse processo de constituição.

Primeiramente pontuamos que não foi encontrado material específico que trazia um percurso histórico sobre a constituição da Geometria Fractal. Adotamos então os seguintes caminhos: 1) buscar por teses e dissertações que trouxessem elementos sobre a presença de objetos fractais na Matemática; 2) buscar por materiais que envolviam ou eram entrevistas e falas de Benoit Mandelbrot, bem como outros matemáticos que contribuíram para a constituição dessa área; 3) buscar em repositórios internacionais sobre publicações, eventos e periódicos envolvendo a temática.

Com relação ao primeiro item, optamos por realizar a busca desses matérias no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Google Acadêmico. Nossa escolha se deu nesses materiais por entender que poderiam haver fragmentos que fossem pertinentes ao arcabouço teórico bem como evidências históricas da presença de objetos que são reconhecidos como fractais. Esse entendimento se deu principalmente por leituras de materiais no grupo de pesquisa e nas produções do grupo de pesquisa ao qual os autores estão inseridos, uma vez que havia essa característica nesses documentos de trazer pequenos excertos nesse sentido.

Realizamos então uma pesquisa no período de 09 a 13 de outubro de 2023, utilizando

os seguintes termos⁴: *origem dos fractais*; *surgimento dos fractais*; *origem da geometria fractal*; *surgimento da geometria fractal*. Desta busca chegamos a 94 trabalhos, dos quais fizemos a leitura dos títulos, resumos, palavras-chaves, sumário e introdução, reduzindo os trabalhos a serem lidos por completos em 34. Nosso critério de exclusão foi o que desconsiderar trabalhos em que os fractais apareciam apenas de forma tangencial ou que não apresentavam nos itens lidos elementos que remetesse a aspectos históricos desses objetos. Assim, trabalhamos com textos em que os fractais eram o foco principal e textos em que os fractais eram objetos secundários, porém estavam envolvidos diretamente à temática do trabalho e havia um espaço dedicado a discutir sobre esses objetos.

Porém, quando olhamos somente para esses documentos não identificamos discussões sobre a trajetória de Mandelbrot. Entendemos que essa trajetória é importante, pois como principal figura ligada a esses entes, compreender sua história, contextos e influências nos ajuda a compreender como Mandelbrot teve seu olhar para esses objetos e organizou-os como um conjunto de conhecimentos.

Dessa forma, buscamos por documentos que trouxessem essa trajetória e, a partir de uma busca no Google por *história de Benoit Mandelbrot*, nos deparamos com duas fontes pertinentes: a tese de doutorado de Camp (1999) (que faz uma entrevista e descreve sua história e trajetória pessoal e na pesquisa) e a entrevista de Mandelbrot a Lesort (1986). Também recorremos ao *Arquivo de História da Matemática MacTutor*, um portal que contém biografias de mais de 3.000 matemáticos, mantido por dois professores eméritos da Universidade de São Andrews. Esse portal já recebeu prêmios e honras por suas contribuições.

Esses caminhos de busca possibilitaram levantar, estudar e discutir alguns pontos importantes, porém, como não possuem esse objetivo, não se aprofundam ou sequer mencionam sobre a divulgação e propagação da Geometria Fractal. Recorremos então a base de dados *Mathematical Reviews*, que é um catálogo cujo objetivo é fornecer informações sobre artigos e livros desde o período de 1940. Sua versão eletrônica possui também comentários de especialistas, listagens bibliográficas, links, periódicos e editoras, resumos das produções e espaços de busca com filtros específicos. Ao pesquisar pelo termo *fractal* entre os dias 29 de fevereiro e 14 de março de 2024, sem aplicação de filtros, obtivemos um retorno de 23.100

⁴ Utilizamos essas terminologias, apesar da visão historiográfica adotada, de forma a abranger trabalhos ainda que não seguissem essa historiografia, mas que apresentassem informações pertinentes ao estudo.

publicações, que iniciam em 1975, divididas em cinco tipos: 20.280 artigos de periódico; 1.408 artigos publicados em anais de eventos; 671 eventos e anais completos dos eventos; 623 livros; 118 teses. Devido ao grande volume, trabalhamos com quinquênios, por compreender que esse agrupamento de cinco anos nos permite condensar os dados e informações a serem estudados, sem perder características importantes ao longo do período observado.

Ressaltamos que não houve uma delimitação temporal nessas buscas realizadas, por dois fatores: 1º) gostaríamos de observar, levantar e identificar indícios da constituição da Geometria Fractal desde os primeiros elementos referentes a ela até os dias de hoje; 2º) para olharmos os elementos que compõe a constituição de uma área científica precisamos de um período longo, visto que por ser um processo que envolve pesquisa, discussão, debate, novas pesquisas, aprofundamentos, mais discussões e assim por diante, um espaço de dez anos por exemplo não seria suficiente. Na seção seguinte, evidenciamos como essa amplitude foi importante, principalmente na busca realizada no banco de dados do *Mathematical Reviews*.

A CONSOLIDAÇÃO

Ao nos debruçarmos sobre os fractais ao longo da história, é preciso ponderar que não estamos objetivando apenas estudos dos momentos em que esses objetos foram assim nomeados e organizados, mas que estamos olhando para questões que advém de antes de sua estruturação. Particularmente, ao nos voltarmos para o século XIX, Paiva (2015) destaca que os estudos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral (CDI) desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) já estavam sólidos o suficiente para que pudesse se afirmar que toda curva que fosse contínua, deveria ter uma tangente bem definida.

A questão é que haviam elementos que fugiam a essa definição, e ainda sim existiam. Karl Weierstrass demonstrou que existe uma função contínua em todo o seu domínio, não sendo diferenciável em nenhum de seus pontos. Segundo Trochet (2009) essa teria sido o primeiro exemplo de comprovação rigorosa a partir de uma manipulação simbólica.

Objetos matemáticos como esse, os quais não se encaixavam nas definições e características das teorias que se tinha, eram considerados como monstros ou aberrações matemáticas. Apontamos esse exemplo das curvas, pois devido à exploração de curvas contínuas sem tangentes que alguns monstros hoje são reconhecidos como fractais: Curva de Peano, Curva de Koch e Curva de Hilbert.

De acordo com Almeida (2006) e Oliveira (2019) a Curva de Peano foi publicada por

Giuseppe Peano (1858-1932) em 1890 no artigo *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane* (*Sobre uma curva que preenche toda uma área plana*). Essa curva foi resultado de um estudo sobre as noções de continuidade e dimensão, cujo o objetivo era aprofundar ideias relativas a esses conceitos. Essa publicação teria recebido críticas de matemáticos como Naum Yakovlevich Vilenkin (1920-1991) e Jean Dieudonné (1906-1992), devido ao fato de provocar inquietações nas bases matemáticas.

Um ano depois, David Hilbert (1862-1943) publicou sobre uma curva que cobriria uma superfície quadrada em seu artigo *Über Stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (*Sobre o mapeamento contínuo de uma linha em um pedaço de superfície*). Essa curva seria mais um exemplo em que havia a continuidade, mas não havia retas tangentes (Barbosa, 2005).

Por fim, uma terceira curva em que falha a definição do CDI que se tinha até o momento, é a curva publicada por Niels Von Koch (1870-1924) em dois artigos: um de 1904 intitulado *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire* (*Sobre uma curva contínua sem tangente, obtida por uma construção geométrica elementar*) e um de 1906 intitulado *Une méthode géométrique élémentaire pour courbes planes* (*Um método geométrico elementar para curvas planas*).

De acordo com Trochet (2009), a intenção de Koch era de prova a existência dessas curvas por meio da geometria elementar. Dessa forma, houve um evidenciamento da relação entre esses monstros com o campo da Geometria.

Outro matemático que estudou sobre curvas que cobririam o plano foi Waclaw Sierpinski (1882-1969) que em seus estudos sobre a Teoria das funções (Barbosa, 2005) publicou o trabalho *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée* (*Sobre uma curva cantoriana que contém uma imagem biunívoca e contínua em qualquer curva dada*).

Dois matemáticos que também trabalharam com monstros, numa perspectiva de Teoria das Funções foram Gaston Julia (1893-1978) e Pierre Fatou (1878-1829). Embora não tenham trabalhado juntos, seus nomes foram atrelados por chegarem a resultados muito próximos relacionados a iterações (Barbosa, 2005; Robertson; O'Connor, 2016). Essas pesquisas de Julia e Fatou, publicadas em 1918 no artigo *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* (*Memória na iteração de funções racionais*) por Julia e em 1919 no artigo *Sur les équations fonctionnelles* (*Sobre equações funcionais*) por Fatou, vieram a gerar o que hoje conhecemos por Conjuntos Julia.

Porém, não encontramos a presença desses monstros apenas no cálculo. George Cantor (1845-1918) se dedicou e contribuiu fortemente à Teoria dos Conjuntos, publicando em 1883 um trabalho em que apresentava um conjunto não-enumerável obtido através da remoção sucessiva dos terços médios abertos de um intervalo (Barbosa, 2005; Oliveira, 2019).

Em todos esses elementos aqui citados, todos os matemáticos apresentados, e outros mais que podem não ter aparecido em nossa pesquisa, se referem a objetos matemáticos que representavam certa anomalia e inconsistência dentro de seus respectivos campos de estudo. Ao longo da pesquisa, não identificamos interesse de algum desses matemáticos em formar um campo que abarcasse a todos esses elementos, buscando similaridades, padrões ou características em comum.

Podemos pensar que isso se deu por se limitarem a estudar e pesquisar apenas dentro do próprio campo seguindo apenas uma específica ótica de investigação, como aponta Trochet (2009), ou pelo fato de não se encaixarem nas teorias e ser mais simples ignorá-los, como destacado por Camp (1999). Perozzo (2021) destaca que podemos pensar também na falta de ferramentas adequadas para trabalhar com esses elementos.

A organização desses objetos enquanto campo, observando suas características e semelhanças, se deu apenas com Benoit Mandelbrot (1924-2010). Camp (1999), Robertson e O'Connor (1999) e Barbosa (2005) apontam que foi ele o responsável por adotar e inserir no contexto matemático o termo fractal, bem como sistematizar os conhecimentos que se tinha sobre os até então monstros. Para entender mais desse processo, é preciso entender sobre a história do próprio.

Mandelbrot é francês, e embora tenha crescido e estudado no período em que o grupo Bourbaki estava em alta, desde pequeno sentia proximidade com a geometria e buscou sempre que possível realizar seus estudos nesse sentido (Lesort, 1986). Em 1948 se mudou para os Estados Unidos a fim de estudar ciência aeroespacial, ingressando em 1958 na *Internacional Business Machines Corporation* (IBM).

Como destacado em sua entrevista à Lesort (1986), a IBM foi essencial para o desenvolvimento de seus estudos, uma vez que oportunizava liberdade e estrutura nas pesquisas, importância essa para quem desejava se desdobrar em investigar a ordem onde se via apenas o caos. Esse estudo da busca pela ordem, transpassa por diversas áreas e isso fica evidente ao acompanharmos os estudos de Mandelbrot.

Pesquisador de diversas áreas, iniciou seus estudos a partir de investigações em

economia, em que se direcionou a estudar os preços do algodão durante certo período. Segundo Lesort (1986) indo contrário à convenção de que as variações diárias se davam por especulações e mudanças a longo prazo, Mandelbrot observava descontinuidades e fenômenos estatisticamente idênticos em escalas diferentes. Nesse período, ele foi convidado a ser professor de Economia em Harvard.

Certo tempo depois, retornou à IBM e passou a estudar sobre turbulências e ruídos. Com relação as turbulências, utilizou-se de gravações, fotografias e desenhos, compreendendo-as como sendo um fenômeno semelhante aos redemoinhos (Lesort, 1986). Dessa forma, as turbulências se assemelhavam aos redemoinhos em que cada rajada se subdividia em rajadas mais finas e estas em outras mais finas.

Com relação aos ruídos, Almeida (2006) e Oliveira (2019) destacam que chegou ao conhecimento de Mandelbrot um problema sobre ruídos nas linhas de transmissão da IBM, o que fazia com que houvesse interferências na transmissão de dados entre os computadores, assim provocando erros. Como as tentativas de tentar eliminar o ruído haviam falhado, Mandelbrot buscou explorar outra possibilidade: considerou os ruídos como inevitáveis e procurou por padrões neles.

Ao estudar então esses ruídos, segundo Carvalho (2005) e Eleutério (2021), Mandelbrot observou que chegavam em blocos, que ao serem ampliados eram observados blocos menores com estruturas similares, o que acontecia novamente com uma nova ampliação, e assim sucessivamente. Essa característica se assemelhava ao conjunto descrito por Cantor em 1883 mencionado anteriormente. Como havia esse padrão, era possível programar as máquinas para reconhecerem esses padrões, diferenciando os ruídos das informações desejadas. Isso não acabou com o problema, mas reduziu satisfatoriamente.

Nestas três situações estudadas por Mandelbrot é possível notar a primeira característica dada aos fractais: a autossimilaridade. Em todos os casos, observa-se que ao comparar o todo com uma parte, tem-se uma similaridade e semelhança entre eles. De acordo com Trochet (2009), o primeiro a apresentar essa ideia de autossimilaridade foi Ernesto Cesàro (1859-1906) ao estudar um artigo de Koch.

Ainda segundo Trochet (2009), outro matemático que se debruçou sobre esse tema foi Paul Pierre Lévy (1886-1971). Lévy e Mandelbrot tiveram uma relação próxima, sendo o primeiro incentivador e motivador do segundo no estudo e pesquisa de fenômenos matemáticos da natureza para além de questões algébricas (Araújo, 2015). Em seus estudos sobre os artigos

que Abraham Samilovitch Besicovitch (1891-1970) que discutia a dimensão de Hausdorff, Lévy se dedicou a estudar a autossimilaridade.

Em particular ao investigar a curva de Koch, observou que esse era um exemplo de curva que possuía autossimilaridade, inferindo então que era possível gerar curvas iterativas e conectadas que cobririam o plano após uma certa quantidade de iterações (Trochet, 2009). Assim, entendemos que atrelada à essa primeira característica da autossimilaridade, está o conceito de iteração, que ao ser realidade infinitamente gera a complexidade infinita. É através desse processo de iteração que se obtém e se observa a semelhança do todo com a parte.

De forma a se aprofundar e dar continuidade em suas investigações, Mandelbrot optou por desenvolver seus estudos em um problema cujo campo em que estivesse localizado havia poucas investigações. Mandelbrot destaca a Camp (1999) que essa escolha se deu não por medo, mas pela questão de haver poucos especialistas, assim tendo liberdade para explorar, testar e aplicar conjecturas que estava construindo de diferentes maneiras.

Ele se deparou com o problema da extensão/comprimento do litoral da Grã-Bretanha (Carvalho, 2005; Eleutério, 2021). De acordo com Camp (1999), o estudo do litoral era pertinente, pois nele haviam irregularidade e rugosidades em que era possível observar e estudar a autossimilaridade.

Partindo de estudos publicados por Lewis Fry Richardson (1881-1953) Mandelbrot iniciou suas pesquisas explorando mais da autossimilaridade. Richardson já havia realizado medições de litorais e já havia concluído que quanto mais precisa fosse a medição, considerando as irregularidades, menor seria a referência de comprimento e maior seria o comprimento total, isto é, a extensão de um litoral dependeria da referência adotada (Camp, 2009).

De acordo com Lesort (1986), Mandelbrot entendia que era possível traduzir a autossimilaridade como um número, e que esse número seria fracionário. Com isso ele esbarrava nas ideias dos matemáticos da época, de que espaços com dimensão fracionária só conseguiam representar elementos fora da realidade.

Para fazer essa exploração, Mandelbrot se juntou a Sigmund Handelman, um colega da IBM, e juntos elaboraram uma programação que possibilitasse gerar imagens de forma a imitar formas reais de relevo (Camp, 2009). Com esse auxílio visual, a resistência às construções feitas por Mandelbrot e Handelman foram caindo, uma vez que ficava evidente a proximidade entre o que foi gerado com a realidade.

Assim como Lévy, Mandelbrot então se desdobrou sobre os estudos de Besicovitch que

se basearam em Hausdorff. Trochet (2009) aponta que os resultados obtidos por Hausdorff foram significativos para o desenvolvimento da Geometria Fractal e para a Topologia, por mostrar que conjuntos pudessem ter uma dimensão com valor arbitrário e diferente de zero. Besicovitch, a partir desses estudos, publicou três artigos discutindo sobre a teoria de Hausdorff, de forma que estendeu os estudos de propriedades de densidade de conjuntos para as de medida finita.

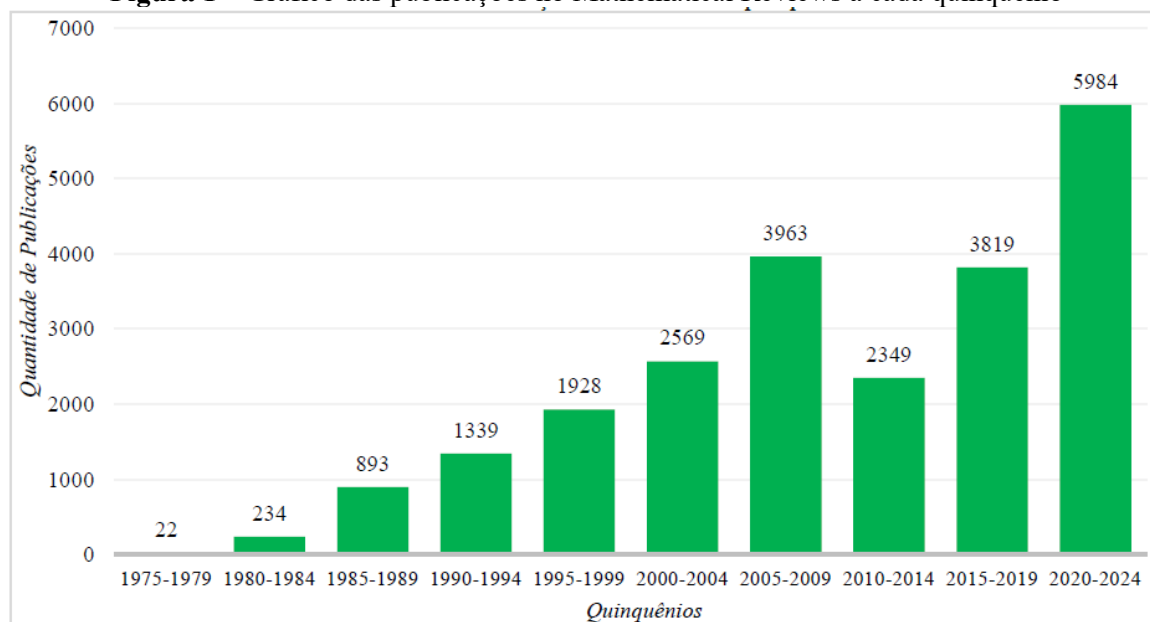
Dessa forma, de acordo com uma palestra conferida na TED2010 pro Mandelbrot, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch seria uma boa medida para representar a rugosidade de um objeto. Assim, havia-se a terceira característica de um fractal que é a sua dimensão fracionária. Com isso, era possível afirmar que haviam fenômenos existentes fora do espaço unidimensional, mas que não chegavam a ocupar um espaço bidimensional.

Todo o repertório, experiências, estudos e construções realizada por Mandelbrot até esse momento, constituíram um arcabouço de conceitos e ideias que, ao serem apresentadas em uma palestra na França em 1973, o instigaram a produzir, inicialmente um artigo, o livro *Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão* em 1975 (*Les objets fractals: forme, hasard et dimension*). É nesse livro que Mandelbrot nomeia e caracteriza o que é um fractal, marcando o início do uso desse termo.

A partir dessa publicação de Mandelbrot, espalha-se pela comunidade científica a discussão e o debate sobre os fractais. Observando os resultados obtidos na busca feita no *Mathematical Reviews*, podemos observar na Figura 1 a crescente na publicação e divulgação dos objetos fractais entre o primeiro e o sétimo quinquênio.

Dentre os dez quinquênios organizados, trazemos alguns detalhes sobre os dois primeiros, isto é, os dez primeiros anos após a publicação da primeira obra de Mandelbrot. Assim, no primeiro quinquênio temos como característica geral das publicações discussões relativas aos fractais a partir da sua relação com conceitos de diversas áreas. Podemos entender então que há uma busca em relacionar os fractais com essas outras áreas, de forma a evidenciar seu papel em modelar fenômenos que até então não possuíam uma representação que se aproximasse e que traduzisse bem fenômenos de certa forma irregulares.

Figura 1 – Gráfico das publicações no Mathematical Reviews a cada quinquênio



Fonte: Santos (2024).

É possível identificar as áreas da Física, Biologia e Química como sendo as que utilizam desses entes para discutir questões internas a elas. Podemos inferir nesse caso, que há uma certa aplicação de um conhecimento, no caso os fractais, que vai se aprofundando de acordo com o modo que as pesquisas sobre esses entes também vão se aprofundando.

Para além disso, quando olhamos os eventos em que aparecem discussões de fractais nos anais, não há um foco direcionado e específico voltado aos fractais, apenas eventos de outras temáticas. Uma possibilidade então é compreender que nesse momento os fractais ainda não estavam em discussão como um ente matemático próprio, mas como uma ferramenta para discussões de outras áreas e conceitos.

Com relação ao segundo quinquênio, temos ainda a presença dos fractais como um elemento para abordar e discutir conceitos de outras áreas, porém passam-se a ter estudos sobre os objetos fractais dentro do campo da Matemática e possíveis relações com outros conceitos matemáticos. Sob um olhar quantitativo, há um aumento significativo em publicações, o que podemos compreender como um crescimento no interesse pelo tema, assim como sua inserção no contexto educacional através de uma tentativa de aproximação das pesquisas de Mandelbrot com o cenário escolar em diferentes níveis, realizada pelo professor Heinz-Otto Peitgen. Entendemos então que nesse período, havia uma discussão maior referente aos fractais no sentido de exemplifica-los, divulga-los e inseri-los tanto no meio acadêmico quanto no contexto

do ensino.

De modo geral, ao nos debruçarmos sobre os dez quinquênios, olhando separadamente para cada um dos cinco tipos de publicação que o banco de dados organiza os dados disponíveis, há um crescimento na presença dos fractais do quinto para o sexto e do nono para o décimo quinquênio, tanto referente a publicações em periódicos quanto a publicações em eventos. Compreendemos, portanto que há movimento de pesquisa e divulgação, elementos que fazem parte da constituição de uma área científica.

Na seção dos procedimentos metodológicos, pontuamos a não delimitação de tempo para a pesquisa, pois ao buscar por periódicos e eventos com temática específica voltada para os fractais, temos que o primeiro evento ocorreu em 1981 chamado *Caos, fractais e dinâmicas*, totalizando 73 eventos. Já para os periódicos encontramos três, sendo o mais antigo iniciado em 1991 e intitulado *Caos, Sólitos e Fractais*. Consideramos então que tanto os eventos quanto os períodos específicos da temática, em comparação com as publicações, possuem um volume menor. Isso pode ser entendido como um espaço que necessita ainda de mais discussões e aprofundamentos, porém não descaracteriza a presença desses elementos pertencentes ao processo de constituição.

REFLEXÕES ATÉ O MOMENTO

A partir das informações levantadas e estudadas, relacionando os dados históricos com seus contextos e momentos, foi possível identificar elementos referentes ao processo de Constituição da Geometria Fractal. Com o apontamento das evidências dos fractais, antes mesmo da formalização desse conceito, conseguimos elencar elementos que correspondem ao componente *uma base específica formada por teorias, hipóteses e dados obtidos de outros campos de pesquisa* (Bazi & Silveira, 2007), uma vez que os objetos referidos se originam em outras áreas da Matemática.

Já nas explorações e estudos de Mandelbrot, há uma percepção de três noções que são as características atribuídas aos fractais, como forma de reconhece-los, correspondendo assim ao componente *uma base formal constituída por teorias lógicas, matemáticas e explicativas*, e *um domínio constituído por objetos claros e precisos que se referem ao fundo de conhecimento*.

Entendemos como sendo a problemática dessa área o estudo e a investigação de fenômenos que ao serem representados por ferramentas da Geometria Euclidiana, essas representações não se aproximam satisfatoriamente dos mesmos. Logo, a Geometria Fractal

visa compreender relações e estruturas envolvidas nos fenômenos e representa-las de forma semelhante ao explorar as irregularidades e evidenciar a ordem no caos.

Ao reconhecer os fractais como sendo ferramentas para uma representação próxima dos fenômenos e elementos da natureza, em forma estrutura e organizada como Mandelbrot propõe com seu livro em 1975, identificamos mais dois componentes: *uma base filosófica ou visão geral constituída por suposições gerais acerca do mundo, do conhecimento e da boa conduta, e um fundo de conhecimentos, representado pelo corpo de conhecimentos obtidos pelo campo em outras épocas.*

Nesse mesmo sentido, pensando nas Geometrias Não-Euclidianas e seu desenvolvimento ao longo da história, como formas de representar elementos que fogem à estrutura da Geometria Euclidiana, podemos considera-las como sendo pontapé inicial das investigações de Mandelbrot, além das explorações realizadas por Peano, Koch, Hilbert e outros matemáticos, que contribuíram, indiretamente, com considerações e saberes para essa área. Reconhecemos então mais dois componentes: *a problemática, formado pelo conjunto de problemas abordados pelo fundo de conhecimento e o objetivo, ou seja, o conjunto de metas de pesquisa.*

Pensando nas palestras e publicações de Mandelbrot, mesmo as anteriores a seu livro de 1975, reconhecemos indícios do Sistema Social, uma vez que essas ações tinham por objetivo disseminar os resultados e considerações obtidas por ele em seus estudos. Em particular essas ações estavam voltadas para os cursos universitários, em particular docentes e discentes, assim como os periódicos e eventos científicos.

Para o recorte histórico que adotamos, não encontramos evidências sobre os métodos e metódica que poderiam ser utilizados no contexto da Geometria Fractal, embora conheçamos algumas das explorações de Mandelbrot. Também não identificamos de forma clara a presença de sociedades profissionais e acadêmicas, nem de agências de fomento, componentes do Sistema Conceitual.

Por fim, consideramos que existem elementos suficientes para caracterizar a presença do processo de Constituição da Geometria Fractal, embora nesse contexto investigado ainda hajam componentes que não foram encontradas evidências ou que precisam de aprofundamento a fim de fortalecer os sistemas conceitual e social.

REFERÊNCIAS

- Almeida, A. A. O. (2006). *Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula* (Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11076>
- Araújo, J. M. (2015). *Teoria matemática implícita na geometria fractal: Construindo fractais com a ferramenta computacional Asymptote* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Roraima. http://www.bdtu.ufrr.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=308
- Barbosa, R. M. (2005). *Descobrendo a geometria fractal: Para sala de aula* (2. ed.). Autêntica.
- Bazi, R. E. R., & Silveira, M. A. A. (2007). Constituição e institucionalização da ciência: Apontamentos para uma discussão. *TransInformação*, 2(19), 129–137.
- Camp, D. R. (1999). *A cultural history of fractal geometry: The biography of an idea* (Tese de Doutorado em Filosofia). Universidade de Chicago. <https://www.proquest.com/openview/346396cd8bee46574e1550f381714b14/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>
- Carvalho, H. C. (2005). *Geometria fractal: Perspectiva e possibilidades no ensino de matemática* (Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal do Pará. <https://repositorio.ufpa.br/handle/2011/1857>
- Carvalho, H. C. (2020). *Geometria fractal & atividades* (1. ed.). RFB Editora.
- Cervo, A. L., Bervian, P. A., & Silva, R. (2007). *Metodologia científica* (6. ed.). Pearson Prentice Hall.
- D'Ambrosio, U. (2021). A interface entre história e matemática: Uma visão histórico-pedagógica. *Revista História da Matemática para Professores*, 7(1), 41–64.
- Eleutério, A. P. (2021). *O espaço de Hausdorff e a dimensão fractal: Estudo e abordagens no ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Uberlândia. <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/33499>
- Fontana, F., & Pereira, A. C. T. (2021). Pesquisa documental. In C. A. O. Magalhães Júnior & M. C. Batista (Orgs.), *Metodologia da pesquisa em educação e ensino de ciências* (pp. 50–69). Massoni.
- Lesort, M. (1986). *Comment j'ai découvert les fractales*. <https://www.larecherche.fr/math%C3%A9matiques-histoire-des-sciences/%C2%AB-comment-jai-d%C3%A9couvert-les-fractales-%C2%BB>
- Mandelbrot, B. (1982). *The fractal geometry of nature*. Henry Holt and Company.
- Miguel, A., & Miorim, M. A. (2002). História da matemática: Uma prática social de investigação em construção. *Educação em Revista*, (36), 177–203.
- Oliveira, L. M. (2019). *Uma proposta de geometria de fractais para a sala de aula* (Dissertação de mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de

- Juiz de Fora. <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/11291>
- Paiva, F. O. (2015). *Classificação de rochas ígneas e metamórficas por meio da dimensão fractal* (Dissertação de Mestrado em Física). Instituto Federal da Bahia. https://ppg fis.ufba.br/pt-br/teses-dissertacoes?title=&field_autor_value=&field_categoria_value=All&field_ano_publicacao_value=All&page=1
- Perozzo, J. V. (2021). *Uma proposta de aplicações de fractais para a sala de aula* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade do Estado de Mato Grosso. https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11060507
- Robertson, E. F., & O'Connor, J. J. (1999). *Benoit Mandelbrot*. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mandelbrot/>
- Robertson, E. F., & O'Connor, J. J. (2016). *Pierre Joseph Louis Fatou*. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fatou/>
- Saito, F. (2015). *História da matemática e suas (re)construções contextuais* (1. ed.). Livraria da Física.
- Santos, G. O. (2024). *Geometria fractal: Constituição, institucionalização e consolidação de uma área científica* (Dissertação de mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual do Paraná. <https://repositorio.unespar.edu.br/handle/123456789/292>
- Struik, D. J. (1985). Por que estudar história da matemática? In R. Gama (Org.), *História da técnica e da tecnologia: Textos básicos* (pp. 191–215). Editora da Universidade de São Paulo.
- TED. (2010, 6 de julho). *Benoit Mandelbrot: Fractais e a arte da rugosidade* [Vídeo]. <https://www.youtube.com/watch?v=ay8OMOs6AQ>
- Toledo, J. C. (2008). *Uma história do processo de institucionalização da área de Análise Matemática no Brasil* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102136>
- Trivizoli, L. M. (2016). Um panorama para a investigação em história da matemática: Surgimento, institucionalização, pesquisas e métodos. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 5(8), 189–212.
- Trochet, H. (2009). *A history of fractal geometry*. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/fractals/>

Submetido em: 21/10/2025

Aceito em: 21/12/2025