

Modelamento matemático de um sistema hidráulico experimental¹

Wesley Esdras Santiago², Adriano Chaves Bastos²

¹ Aceito para publicação em 1° de outubro de 2011

² Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEAGRI, Departamento de Instrumentação e Controle de Processos Agrícolas, Campinas, SP.

Palavras-chave: modelagem matemática, sistema hidráulico, função de transferência.

Resumo

O comportamento de um sistema pode ser estimado com o estudo dos elementos ou sinais que interagem com o mesmo, e este pode ser descrito através de funções e equações. O objetivo deste trabalho foi determinar e validar a função de transferência de um sistema hidráulico. Foi utilizado um equipamento experimental onde foram estimados os parâmetros de Resistência ao fluxo do líquido e Capacitância do reservatório, obtendo a função de transferência. Para estimar estes parâmetros foi necessário efetuar a calibração do sensor de pressão do equipamento, determinação do escoamento livre em função do tempo de esvaziamento do reservatório e calibração da moto-bomba pela curva tensão/vazão. Após a definição da função de transferência os dados foram validados e linearizados em torno do ponto de controle no nível de 15 cm do reservatório. A simulação obteve resultados próximos aos dados experimentais, ocorrendo desvios entre -0,5 e 0,5 cm do ponto de controle. A função de transferência encontrada para o sistema hidráulico estudado representa bem os dados

experimentais, apresentando baixo erro entre o experimental e o simulado.

Mathematical model of an experimental hydraulic system

Abstract

The performance of a system can be estimated with the study of signs or elements that interact with it, and this can be described using functions and equations. The objective of this research was to determine and validate the transfer function of a hydraulic system. We used an experimental equipment which were used to estimate the parameters of the liquid flow resistance and capacitance of the reservoir, obtaining the transfer function. To estimate these parameters was necessary to effect the calibration of pressure sensor equipment, determination of free flowing depending on the time of emptying the tank and motor pump calibration curve for voltage / flow. After defining the transfer function data were validated and linearized around the control point at the level of the reservoir 15 cm. The simulation results obtained close to the experimental data, deviations occurring between -0.5 and 0.5 cm from the point of control. The transfer function found for the hydraulic system is studied and the experimental data, with low error between experimental and simulated.

Key words: mathematical modeling, hydraulic system, transfer function.

Introdução

A descrição de um sistema de controle se baseia na relação entre os elementos ou sinais de entrada e saída, sendo introduzidos parâmetros de controle ou de atuação na malha do sistema conforme suas exigências.

As principais características de sistemas dinâmicos são destacadas e definidas em função de sua modelagem matemática, sendo que os sistemas podem ser lineares, onde suas derivadas e variáveis dependentes são elevadas apenas à primeira potência; não lineares, onde suas variáveis dependentes ou suas derivadas são elevadas a potências de ordem superiores; invariante no tempo, onde os parâmetros não variam conforme o tempo; variantes no tempo, onde sua resposta depende do tempo no qual a entrada é aplicada; e os sistemas também podem ser contínuos ou discretos, contínuos quando o comportamento é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem e discreto quando os eventos ocorrem a intervalos de tempos discretos e sua equação de equilíbrio é escrita em termos de equações de diferenças discretas (Dorf et al., 2001; Ogata, 2003; Castelan, 2005).

A equação que descreve um sistema pode ser obtida por dois métodos, o analítico e o experimental. No analítico todos os elementos presentes e atuantes sobre o sistema devem ser descritos em forma analítica, ou seja, todos os parâmetros envolvidos com o processo devem ser modelados matematicamente de forma a obter uma equação que descreve o comportamento do sistema, respondendo a um sinal de entrada da mesma forma que o sistema físico responderia. Este método apresenta baixo custo, porém é bastante trabalhoso e necessita de profissionais com alto nível de conhecimento, tendo em vista que todos os parâmetros intrínsecos ao processo devem ser considerados, desde características físicas do equipamento como influências ambientais.

O método experimental tem se apresentado bastante eficaz na determinação da equação matemática que descreve sistemas, pois ao definir uma equação baseada apenas na entrada e saída de um sistema composto, todos os parâmetros envolvidos direta ou indiretamente estarão inseridos no processo que resulta na resposta frente a um sinal de entrada (Pirozzi e Amendola, 2005). Embora eficaz este método é bastante oneroso, considerando que a planta física definitiva ou experimental deverá estar em funcionamento.

Neste trabalho será apresentada a modelagem matemática da função de transferência que rege o funcionamento de um sistema hidráulico. Desta forma, o objetivo deste trabalho foi modelar o sistema físico utilizando o método experimental e validar o modelo obtido através de uma comparação com os dados experimentais.

Materiais e métodos

ensaio foi efetuado no Laboratório 0 de Instrumentação e Controle (LABLIC) da Faculdade de Engenharia Agrícola da UNICAMP, utilizando uma planta de controle de nível modelo TS1028 da T&S Equipamentos Eletrônicos[®]. O equipamento possui estrutura em madeira e acrílico e composto basicamente de dois reservatórios em desnível, uma eletroválvula, uma válvula manual, uma moto-bomba com ajuste eletrônico de vazão e um sensor de pressão (T&S Equipamentos Eletrônicos, 2011), conforme mostrado na Figura 1A. Para efetuar a aquisição de dados e o controle do equipamento, foi utilizado umsistema de interface Analógico/Digital modelo USB-6009 da National Instruments[©], mostrado na Figura 1B, e o a rotina de

aquisição e controle do equipamento desenvolvida no programa computacional MATLAB da The Math Works©.



Β.



Figura 1- A.Bancada experimental para controle de nível (T&S Equipamentos Eletrônicos, 2011).B. Modulo de interface de aquisição e controle (National Instruments, 2011).

Para efetuar a modelagem matemática do sistema hidráulico é necessário se conhecer o tipo de escoamento do líquido durante sua trajetória. O escoamento do fluido pode ser calculado através do número de Reynolds, conforme a Equação 1. Quando os valores estiverem abaixo de 2000, o escoamento é considerado Laminar, e para valores acima de 4000, ele é considerado Turbulento. Dentro destes limites o escoamento é considerado um regime de Transição.

$$Re = \frac{\rho \, v \, D}{v} \tag{1}$$

Onde:

Re = Número de Reynolds (adimensional);

 ρ = viscosidade do fluido (kgfcm-³);

V = velocidade média do escoamento (cm s-1);

D = diâmetro da tubulação (cm);

v = viscosidade cinemática do fluido (kgf cm-1s-1);

O equipamento estudado neste experimento pode ser representado de forma esquemática conforme a Figura 2.



Figura 2 - Representação esquemática do equipamento estudado (Cappelli, 2010).

Onde:

C = Capacitância do reservatório;

R = Resistência ao fluxo do líquido;

Q+qi = vazão de entrada do reservatório mais a variação da vazão de entrada;

Q+qo= vazão de saída do reservatório mais a variação da vazão de saída;

H+h= nível do fluido no reservatório mais a variação do nível.

A Capacitância do reservatório é definida como a variação na quantidade de líquido armazenado necessário para causar

uma mudança unitária no potencial, ou seja, no nível do reservatório, e pode ser calculada pela Equação 2.

$$C = \frac{Variação na quantidade de líquido armazenado (cm3)}{Variação na altura do nível (cm)}$$
(2)

A Resistência ao fluxo é definida como a modificação necessária para causar a variação unitária na taxa de escoamento e pode ser calculada pela Equação 3.

$$R = \frac{Variação na diferença de nível (cm)}{Variação na vazão em volume (cm3 s-1)}$$
(3)

A Resistência ao fluxo (R) é dependente do tipo de escoamento no tubo de saída do reservatório, conforme determinado pelo número de Reynolds e definido na Equação 1. Para o Fluxo Laminar a Resistência ao Fluxo (RL) pode ser calculada pela Equação 4, e para o Fluxo Turbulento a Resistência ao fluxo (RT) pode ser calculada pela equação 5.

$$R_L = \frac{H}{Q} \tag{4}$$

$$R_T = \frac{2 H}{Q}$$
(5)

Onde:

RL = Resistência ao fluxo do líquido para fluxo laminar (s cm-2);

RT = Resistência ao fluxo do líquido para fluxo turbulento (s cm-2);

H = Nível do reservatório em regime permanente (cm);

Q = Vazão volumétrica em regime permanente (cm³ s-1).

Considerando este sistema hidráulico estudado um sistema linear, pois as mudanças nas variáveis mantiveramse pequenas e influenciadas apenas pela característica do escoamento superficial do fluido (laminar ou turbulento), podendo ser descrito pela Equação 6, onde a vazão de entrada (qi) menos a vazão de saída (qo), durante um intervalo de tempo dt, é igual à quantidade adicional armazenada no reservatório, ou seja, a Capacitância (C).

$$C dh = (q_i - q_o)dt \tag{6}$$

Utilizando a definição de Resistência ao fluxo, Equações 4 ou 5, e considerando este parâmetro constante, a equação diferencial é representada pela Equação 7.

$$RC\frac{dh}{dt} + H = \mathbf{R}\,q_i\tag{7}$$

Fazendo a transformada de Laplace da Equação 7, onde R e C são constante no tempo, e considerando as condições iniciais nulas, pode-se definir a função de transferência do sistema pela Equação 8, considerando a vazão (QI) como parâmetro de entrada no sistema e o nível do reservatório como parâmetro de saída da função (Hs).

$$G(s) = \frac{Q_I}{H_s} = \frac{R}{RCs+1} \tag{8}$$

Onde:

R = Resistência ao fluxo do líquido (s cm-2);

C = Capacitância do reservatório (cm2);

Os procedimentos para determinação dos parâmetros, bem como a validação dos dados, foram seguidos conforme descrito por Cappelli e Umezu (2009) e roteiro desenvolvido por Garcia (2011). Para determinar estes parâmetros, inicialmente foi efetuada a calibração do sensor de pressão do equipamento, levantando a curva do

nível do reservatório pela tensão do sensor, com duas repetições, ajustando os parâmetros do modelo utilizando o programa computacional EXCEL® da Microsoft©. Este modelo foi utilizado para determinar o nível do reservatório na aquisição dos dados.

Após a calibração do sensor de pressão, foi determinada a curva de escoamento livre através da diferença de nível do reservatório em função do tempo (H x T), ajustando os parâmetros do modelo foram efetuadas 3 repetições. Com a derivada deste modelo obtido e multiplicada pela área do reservatório foi determinada a curva do nível do reservatório em função da vazão de saída (H x Qs), ajustando os parâmetros do modelo utilizando o programa computacional EXCEL® da Microsoft©.

Com o modelo obtido da curva do nível do reservatório em função da vazão de saída (HxQs) e derivando este modelo, obteve-se o modelo para definição da Resistência do fluxo pelo nível do reservatório (RxH).

A partir dos parâmetros levantados, e definindo a função de transferência do sistema, foi efetuada a validação para o sistema hidráulico estudado entre o experimental e o simulado, linearizando para o ponto de controle no nível de 15 cm do reservatório. A Figura 3 mostra o diagrama de aquisição dos dados feito no programa computacional MATLAB da The Math Works©, no módulo SIMULINK.

Para efetuar a validação, ajustou-se também os parâmetros do modelo da curva da tensão da armadura da moto-bomba em função da vazão, com 8 repetições.



Figura 3 - Diagrama de blocos do sistema de aquisição de dados e interface com usuário.

Na Figura 3, é possível visualizar que as variáveis Constant1 e Constant3 são degraus dados no sistema, estes enviam a tensão para a moto-bomba utilizando o sistema de interface Analógico/Digital modelo USB-6009 da National aquisição Instruments[©]. dos dados de nível do A reservatório é efetuado pela mesma interface, eles são enviados para o arquivo no To Workspace1, após a conversão da tensão do sensor de pressão pelo nível do reservatório (Fcn), a variável tempo de processo foi aquisitada através de um bloco de contagem de tempo no To Workspace2.

Os dados adquiridos foram processados por uma rotina de programação efetuada no programa computacional MATLAB da The Math Works©, onde foram estimados o erro médio e o erro ao longo do tempo.

Posterior a esta validação, os parâmetros da função de transferência foram ajustados para adequar-se aos dados experimentais utilizando a Equação 9. Desta forma a função de transferência foi descrita pela Equação 10. Novamente estimou-se o erro médio e o erro ao longo do tempo.

$$k = \frac{PES}{PES - E_m} \tag{9}$$

$$G(s) = \frac{Q_I}{H_s} = \frac{k R}{RCs+1} \tag{10}$$

Onde:

k = fator de correção do sistema simulado;

PES = Ponto de estabilização do sistema simulado (cm);

Em = Erro médio do sistema simulado pelo sistema real (cm);

R = Resistência ao fluxo do líquido (s cm-2);

C = Capacitância do reservatório (cm2).

Resultados e discussões

A partir da Equação 1 calculou-se o número de Reynolds (Re), considerando o orifício de saída do sistema como o Diâmetro do tubo de 0,54 cm. O Re calculado foi de 8509, desta forma o escoamento do sistema é considerado turbulento.

A Figura 5 mostra a curva obtida com o ajuste do modelo da Equação 11 que descreve a relação Tensão pelo Nível do reservatório do sensor de pressão. Pode-se verificar que o sensor possui uma característica linear e o modelo representa bem os dados, pois o coeficiente de correlação (R^2) foi de 0,999.



Figura 5 - Curva de calibração do sensor de pressão com o coeficiente de correlação.

E. S. WESLEY et al.,

$$T_p = 0,0415 H + 0,3487$$
 (11)

Onde:

Tp = tensão no sensor de pressão (V);H = Nível do reservatório (cm);

A Figura 6 mostra a curva de escoamento livre do reservatório com o ajuste do modelo da Equação 12, onde foi mensurado a redução no nível do reservatório no decorrer do tempo.Pode-se verificar que o modelo obtido representa bem os dados, pois o coeficiente de correlação (R^2) foi de 0,999.



Figura 6 - Curva de escoamento livre do reservatório.

 $N = 0,00027421 t^{2} - 0,20682331 t + 24,02273998$ (12) Onde: N = nível do reservatório (cm); t = tempo (s).

Derivando a Equação 12 em relação ao tempo e multiplicando pela área do reservatório, ou seja, a Capacitância de 200 cm², obteve-se a curva da variação do nível em função da vazão de saída, mostrado na Figura 7. A Equação 13 representa o ajuste dos dados apresentados na Figura 7 para a curva Nível do reservatório pela Vazão de saída, onde se verifica que o modelo ajustado representa bem os dados, pois o coeficiente de correlação (\mathbb{R}^2) foi de 0,999.



Figura 7 - Curva do nível do reservatório em função da vazão de saída.

$$N = 0,02279253 Q^2 + 0,00001831 Q - 14,97683250$$
(13)

Onde:

N = nível do reservatório (cm);

Q = vazão de saída (cm3s-1).

Considerando o escoamento do sistema como turbulento, a Resistência ao fluxo foi calculada através da derivada da equação 13 em relação à vazão, conforme equação 14.

$$R_t = \frac{dH}{dQ} = 0,04698402 \,\mathrm{Q} + 0,00001831 \tag{14}$$

Onde:

RT = Resistência ao fluxo do líquido para fluxo turbulento (s cm-2);

Q = vazão de saída (cm3s-1).

A partir da Equação 14, em função da vazão de saída, para cada valor experimental do nível do reservatório, obteve-se o modelo ajustado para a curva de Resistênciaao fluxo pelo nível do reservatório (RT x Q). Verifica-se que este parâmetro é variável com o nível do reservatório, conforme a Equação 15, onde o modelo ajustado representa bem os dados, pois o coeficiente de correlação (R²) foi de 0,999. A Figura 8 mostra a curva da Resistência do fluxo do reservatório pelo nível do reservatório.



Figura 8 - Curva da Resistência do fluxo pelo nível do reservatório.

$$R_t = -0,00023 N^2 + 0,03551 N + 1,22298$$

Onde:

RT = Resistência ao fluxo do líquido para fluxo turbulento (s cm-2);

N = nível do reservatório (cm);

Após a definição dos parâmetros de Capacitância e Resistência ao fluxo para o ponto de controle de 15 cm do nível do reservatório, definiu-se a função de transferência do sistema estudado, conforme Equação 15.

$$G(s) = \frac{Q_I}{H_s} = \frac{1,7038}{340,77s+1}$$
(15)

Para validação dos dados, efetuou-se inicialmente o levantamento da curva de tensão na armadura da motobomba pela vazão da moto-bomba, conforme Figura 9 e modelo ajustado na Equação 16. O levantamento destes dados foi o que demonstrou maior dificuldade do experimento, pois a variação da rotação da moto-bomba era elevada, sendo observada inclusive pelo som emitido pelo mesmo, além do aquecimento do motor durante seu funcionamento. Todos estes problemas dificultaram a obtenção dos pontos de controle e levantamento dos dados.



Figura 9 - Curva da tensão na armadura da moto-bomba pela vazão.

 $Q_b = 20,158 T_b - 42,816$

Onde:

 $Q_b = vazão da moto-bomba (cm³.s⁻¹);$

T_b = tensão na armadura da moto-bomba (V);

Abaixo é mostrada a rotina de programação efetuada no programa computacional MATLAB da The Math Works© para validação dos dados, cálculos do erro e fator de correção da função de transferência.

```
clearall;
clc;
loadD exp orig.mat;
loadTempo exp.mat;
                      %Resistência ao fluxo
R = 1.70388;
C = 200;
                      %Capacitância
                      %Nível inicial Tbomba =
Hi = 130;
3,89 Volts
FTH = tf([R], [R*C 1]);
Qi = 1.2368;
                      %Degrau no sistema Thomba =
3,95 Volts
D sim = step(Qi*FTH,Tempo exp);
D exp = (D exp orig-Hi)/10;
Erro = D exp-D sim;
Erro m = mean(Erro);
P \text{ est sim} = R*Qi;
K corr = P est sim/(P est sim-Erro m);
FTH C = tf([K corr*R], [R*C 1]);
D sim corr = step(Qi*FTH C, Tempo exp);
P est sim c = R*Qi*K corr;
Erro c = D exp-D sim corr;
```

```
Erro c m = mean(Erro c);
figure (1);
plot(Tempo exp, D exp); %Validação da função de
transferência
xlabel ('Tempo (s)');
ylabel ('Nível do Reservatório (cm)');
holdon;
plot(Tempo exp, D sim, 'r');
plot(Tempo exp, P est sim, 'c');
figure (2);
plot(Tempo exp, Erro); %Erro entre os dados Exp.
e Simulados
xlabel ('Tempo (s)');
ylabel ('Erro (cm)');
gridon;
figure (3);
plot(Tempo exp, D exp); %Validação da função de
transf corrigida
xlabel ('Tempo (s)');
ylabel ('Nível do Reservatório (cm)');
holdon;
plot(Tempo exp, D sim corr, '--q');
plot(Tempo exp, P est sim c, '--m');
figure (4);
plot (Tempo exp, Erro c); %Erro entre os dados
Corrigido
xlabel ('Tempo (s)');
ylabel ('Erro (cm)');
gridon;
```

Foi efetuada a aquisição dos dados iniciando no nível de 13 cm, correspondente a uma vazão de entrada de 35,03 cm³.s-1, em seguida o sistema (Qi) foi excitado com um sinal de teste tipo degrau de 1,2368 cm³.s-1, para se estabilizar no nível de controle esperado de 15 cm, correspondente a uma vazão de entrada de 36,26 cm³.s-1. Os dados foram considerados a partir da condição inicial nula, ou seja, no ponto 0. A Figura 10 mostra a curva dos dados experimentais de nível do reservatório no decorrer do

tempo, com os dados simulados utilizando a função de transferência (Equação 15).



Figura 10 - Comparação entre os dados experimentais e simulados (nível do reservatório na condição inicial nula).

Pode-se verificar que o ponto de estabilização simulado do sistema decorreu conforme esperado, pois ele correspondeu ao degrau dado de 2 cm, ou seja 15 cm do nível do reservatório. Mas o mesmo não ocorreu nos dados experimentais, pois se verifica que estes se estabilizaram em torno do ponto de 2,5 cm, ou seja, 15,5 cm do nível do reservatório.

Constata-se também, que apesar de verificar durante a aquisição dos dados experimentais que ocorreu a estabilização do nível do reservatório, pois não demonstrava alteração, o experimento foi interrompido antes da estabilização dos dados simulados. Mas estes dados adquiridos foram suficientes para estimar e modelar o funcionamento do sistema estudado, pois representa em torno de 95% do tempo de estabilização. Outro fato a ser observado nos dados experimentais é de que entre o tempo de 200 segundos e 400 segundos ocorreu uma queda acentuada na curva, isto pode ter ocorrido devido à variação da moto-bomba ou aquecimento do mesmo. A Figura 11

mostra o gráfico do erro entre os dados experimentais e os simulados.



Figura 11 - Erro entre os dados experimentais e simulados.

O erro médio calculado (Em) entre os dados experimentais e os simulados foi de 0,4433 cm. Pode-se verificar na Figura 11 que o erro variou entre -0,5 e 1 cm do ponto de controle, próximo ao esperado. Cappelli e Umezu (2009) efetuaram um ajuste na função de transferência considerando o ponto de estabilização experimental pelo simulado.

Neste experimento foi considerado um fator de correção do ganho estático da função de transferência de 1,7038 para eliminar o erro, considerando o ponto de estabilização e o erro médio calculado, conforme Equação 9. O fator de correção calculado foi de 1,2664. Desta forma a função de transferência foi corrigida, conforme Equação 10, e é apresentada na Equação 17.

$$G(s) = \frac{Q_I}{H_S} = \frac{2,158}{340,77s+1}$$
(17)

A Figura 12 mostra a curva dos dados experimentais do nível do reservatório no decorrer do tempo, com os dados simulados utilizando a função de transferência corrigida (Equação 17).



Figura 12 - Comparação entre os dados experimentais e simulados com a correção do ganho estático (nível do reservatório na condição inicial nula).

Pode-se verificar que com a correção do ganho estático da função de transferência os dados simulados se aproximam dos dados experimentais, pois o ponto de estabilização simulado foi em torno 2,6 cm, correspondendo a 15,6 cm do nível do reservatório. A Figura 13 mostra o gráfico do erro entre os dados experimentais e os simulados após a correção do ganho estático da função de transferência.



Figura 13 - Erro entre os dados experimentais e simulados após a correção da função de transferência.

O erro médio com a correção da função de transferência foi de 0,06 cm. Pode-se verificar na Figura 13 que o erro entre os dados experimentais e os simulados variou entre -0,5 e 0,5 cm, próximo ao ponto de controle alterado, ou seja, 15,6 cm do nível do reservatório e aos dados experimentais. Isto indica-nos que a função de transferência corrigida, representada na Equação 17, descreve razoavelmente bem o comportamento do sistema, pois o erro varia próximo ao ponto de estabilização experimental.

Conclusões

Conclui-se que o a função de transferência encontrada para o sistema hidráulico estudado representa bem os dados experimentais, apresentando pouco erro entre o experimental e o simulado, apesar das variações do sensor de pressão e da moto-bomba interferirem no experimento. Mas para que o modelo se torne confiável é necessário maior número de repetições e novos testes no equipamento.

Referências

CAPPELLI, N. L. Apostila da disciplina de Modelagem e Resposta de Sistemas Dinâmicos. UNICAMP, Campinas, 2010.

CAPPELLI, N.L.; UMEZU, C.K. **Teoria de controle – Uma abordagem de aplicação.** Campinas, 167p., 2009.

CASTELAN, E. B. Estabilização de sistemas descritores por realimentação de saídas via subespaços invariantes. **Revista Controle & Automação**, v.16, n.4, Nov / Dez 2005.

DORF, R. C.; SILVA FILHO, B. S.; BISHOP, R. H. Sistemas de controle modernos. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 659 p.

GARCIA, A. P. Roteiro de aula prática – Bancada de Nível, Campinas, 11p., 2011.

NationalInstruments,disponívelem:http://www.ni.com/Acessado em: 17/06/2011

OGATA, K.**Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 782 p., 2003.

PIROZZI, D. C. Z.; AMENDOLA, M. Modelagem matemática e simulação numérica do resfriamento rápido de morango com ar forçado. **Eng. Agríc**,v.25, n.1, Jaboticabal, Jan./Apr. 2005.

T&S Equipamentos Eletrônicos, disponível em: <u>http://www.tesequipamentos.com.br/</u>. Acessado em: 17/06/2011.