

UN MODELO NUMÉRICO DE LA INTRUSIÓN SALINA CON DISPERSIÓN HIDRODINÁMICA

David Ernesto Marón DOMÍNGUEZ¹

RESUMEN

Se confeccionó un modelo numérico que resuelve las ecuaciones 2D del flujo y del transporte de contaminante en un medio poroso teniendo en cuenta la dispersión hidrodinámica. Se trabaja en el plano vertical y con densidad del fluido constante o variable. Se aplica el Método de los Elementos Finitos (MEF) para la discretización en el espacio y el Método de las Diferencias Finitas (MDF) para la discretización en el tiempo. En el modelo se utiliza el triángulo lineal. El modelo se formula en términos de la carga hidráulica y de la concentración de la sustancia contaminante como funciones incógnitas. Toda la implementación computacional se realiza con el asistente matemático MATLAB. Se verificó y se comprobó el algoritmo numérico comparándose con soluciones de otros modelos reportados en trabajos de la literatura.

Palabras claves: flujo, transporte de contaminantes, elemento finito, acuífero.

ABSTRACT

A numerical model was made that solves the 2D flow and transport of polluting agent equations in porous media considering hydrodynamic dispersion. The model works in the vertical plane and with constant or variable fluid density. The method of Finite Elements (MEF) for the spatial discretization and the method of Finite Differences (MDF) for the time discretization are applied. In the model the linear triangle is used. The model is formulated in terms of the hydraulic head and the concentration of the polluting substance like unknown functions. All the computational implementation is made with mathematical assistant MATLAB. It was verified and the numerical algorithm was verified comparing itself with solutions of other models reported in another works of Literature.

Key words: flow, transport of pollutants, finite elements, aquifer.

INTRODUCCIÓN

Un caso de contaminación en los acuíferos costeros abiertos provocada por la sobreexplotación de los acuíferos es la intrusión salina, la cual es la penetración del agua salada hacia el interior de los acuíferos de agua dulce contaminándolos. Este es un fenómeno muy común en los acuíferos costeros que provoca el deterioro de la calidad del agua dulce e impide su utilización. En Cuba el agua disponible para su uso o consumo proviene, en una gran parte, de las fuentes subterráneas por lo que es necesario su utilización racional y su protección. Debido a la forma estrecha y alargada de Cuba la gran mayoría de sus acuíferos entran en contacto con el mar en alguno de sus contornos por lo que esto hace que sean más propensos a

la contaminación por el agua salada. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es confeccionar un modelo numérico que permita resolver el problema del transporte de contaminantes y que incluya como caso particular el problema de la intrusión salina.

ECUACIONES QUE INTERVIENEN

Para el planteamiento matemático del problema del flujo y del transporte de soluto es necesario formular dos ecuaciones, la primera que rige el movimiento del agua subterránea y la segunda que rige el movimiento del contaminante o soluto en el acuífero las cuales son (BEAR, 1972; HUYAKORN & PINDER, 1983)

¹ Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería Civil, I.S.P.J.A.E.
Av 127 s/n. Marianao. Cdad. de La Habana. Cuba. e-mail: dmaron@civil.cujae.edu.cu

$$\vec{\nabla}(\theta \rho \vec{v}) + \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t} + \theta E \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\theta \rho_{min} \rho \vec{v}^T \vec{\nabla} C + \rho_{min} E \vec{\nabla} C ([D] \vec{\nabla} C) - \rho \vec{\nabla}^T (\rho_{min} [D] \vec{\nabla} C) + \theta \rho (R_T \rho - EC) \frac{\partial C}{\partial t} + \lambda \theta R_T \rho^2 C = 0 \quad (2)$$

$$\theta \vec{v} = - [K] (\vec{\nabla} h + e C \vec{\nabla} z) \quad (3)$$

$$[K] = \frac{\rho_{min} g [k]}{\mu} \quad (4)$$

$$h = \frac{p}{\rho_{min} g} + z \quad (5)$$

$$\rho = \rho(C) = \rho_{min} + E C \quad (6)$$

$$E = \frac{(\rho_{max} - \rho_{min})}{C_{max}} \quad (7)$$

$$e = \frac{E}{\rho_{min}} \quad (8)$$

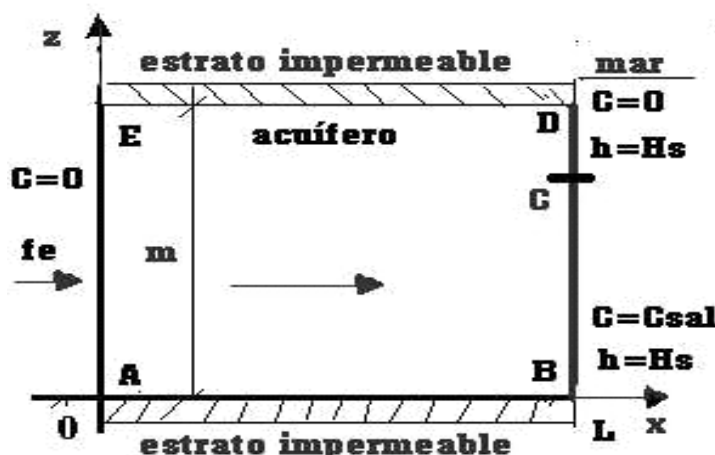
donde θ es la porosidad del medio, ρ es la densidad del fluido (M/L^3), $\vec{v}$ es el vector de la velocidad real del fluido (L/T), S_s es el coeficiente de almacenaje específico ($1/L$), h es la carga hidráulica (L), $[K]$ es el coeficiente de la conductividad hidráulica (L/T), $\vec{\nabla} h$ es el gradiente hidráulico, e es una constante (L^3/M_s), μ es la viscosidad dinámica del fluido (M/LT), $[k]$ es el coeficiente de la permeabilidad intrínseca (L^2), p es la presión del fluido (M/LT^2), g es la aceleración de la gravedad (L/T^2), z es la cota desde un plano de referencia (L), ρ_{min} es la densidad mínima del fluido (M/L^3), E es una constante adimensional (M/M_s), λ es el coeficiente de degradación ($1/T$), $[D]$ es el coeficiente de dispersión (L^2/T), R_T es el coeficiente de retardo, ρ_{max} es la densidad máxima del fluido (M/L^3), C_{max} es la concentración máxima del soluto en el fluido

(M/L^3), C es la concentración del soluto en el fluido (M_s/L^3).

VERIFICACIÓN DEL ALGORITMO

Con el objetivo de verificar y comprobar el modelo numérico propuesto se muestra a continuación la comparación de la solución obtenida del modelo propuesto con la solución de otro modelo reportado en la literatura. En este ejemplo se compara la solución del modelo propuesto aquí con la solución de un modelo reportado en la literatura para un ejemplo de intrusión salina en un acuífero confinado. Los resultados del modelo reportado en la literatura pertenecen al trabajo de Huyakorn (HUYAKORN *et al.*, 1987). En el ejemplo que se muestra se considera el coeficiente de dispersión variable en función de la velocidad. Se parte de un acuífero confinado y homogéneo según se muestra en la figura siguiente. El sistema de referencia a partir del cual se mide la carga hidráulica se ubicó en el fondo del acuífero.

Figura 1. Esquema del acuífero confinado según el ejemplo de Huyakorn.



Los valores de los datos considerados por Huyakorn en este ejemplo son los siguientes:

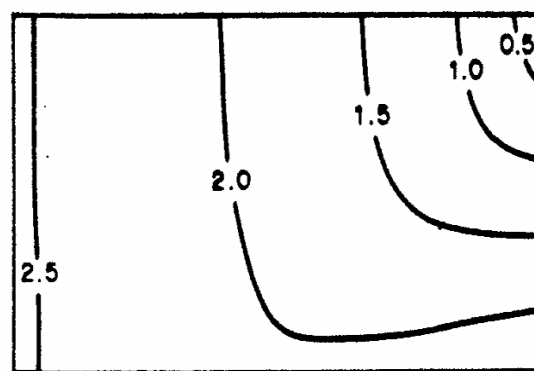
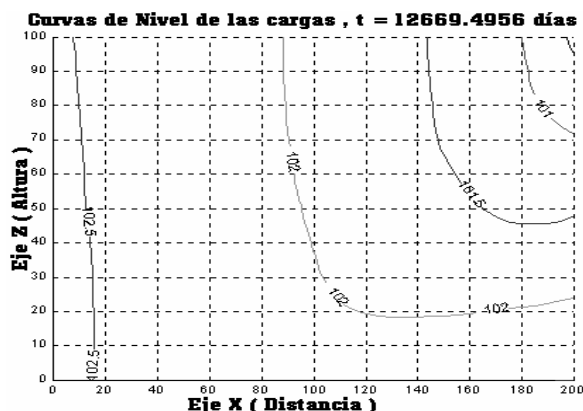
Longitud $L = 200$ m	Densidad del agua dulce $\rho_d = 1000$ Kg/m ³
Espesor saturado $m = 100$ m.	Densidad del agua salada $\rho_{sal} = 1025$ Kg/m ³
Porosidad $\theta = 0.35$	Concentración máxima de sal $C_{sal} = 35$ Kg/m ³
Conductividad Hidráulica $KD = 1$ m/día.	Flujo en la entrada (lado AE) $f_e = \frac{0.0066}{\theta}$ m/día
Dispersividad longitudinal y transversal $\alpha_L = 3.5$ m y $\alpha_T = 3.5$ m	
Difusión molecular $D_m = 0$ m ² /día.	

Para la discretización de la región en el espacio se tomó una malla uniforme con $N_x = 10$ subdivisiones en el eje OX y $N_z = 10$ subdivisiones en el eje OZ. Para la discretización en el tiempo se tomó un primer incremento en el tiempo de $\Delta t = 10$ día y a partir de este valor los otros intervalos los calculó multiplicando por un factor cuyo valor es $f = 1.2$ durante los primeros 25 intervalos y a partir de aquí tomó 10 intervalos mas con un intervalo constante e igual al último intervalo calculado lo cual hace un total de $NT = 35$ número de tiempos y un tiempo final de $T_f = 12669.4956$ días que es equivalente a unos 35 años. Con respecto al error en los cálculos se tomó un error en la carga de 0.01 m y un error en las concentraciones de 0.01. El estado inicial de las cargas se tomó igual al espesor saturado del acuífero $h = m$ y el estado inicial de las concentraciones se tomó nulo.

En la Figura 2 se muestran las curvas de nivel de las cargas correspondiente a los valores

de $h = 102.5$, 102, 101.5 y 101 m para el tiempo final de simulación según el modelo propuesto y según el modelo de Huyakorn. En la Figura 3 se muestran las curvas de nivel de las concentraciones normalizadas correspondientes a los valores $C = 1$ Kg/m³ = 1 g/l ($C/C_{sal} = 0.028571$ Kg/m³) y $C = 17.5$ Kg/m³ ($C/C_{sal} = 0.5$ Kg/m³) para el tiempo final de simulación obtenidas según el modelo propuesto. Se muestran también la curva de la carga sobre el nivel del mar con la cual se calculó la posición de la interfaz según el criterio de la interfaz abrupta. En la Figura 3 se muestran, también, la posición de la isoconcentraciones $C = 0.5$ correspondiente al modelo de Huyakorn para el tiempo final de simulación también. En la Figura 4 se muestran el campo de flujo del fluido y del soluto según el modelo propuesto para el tiempo final de simulación.

Figura 2. Curvas de nivel de las cargas según el modelo desarrollado y el modelo de Huyakorn.



(a) Reference head: $h = p / \rho_0 g + Y$

Figura 3. Curvas de nivel de las concentraciones según el modelo desarrollado y el modelo de Huyakorn.

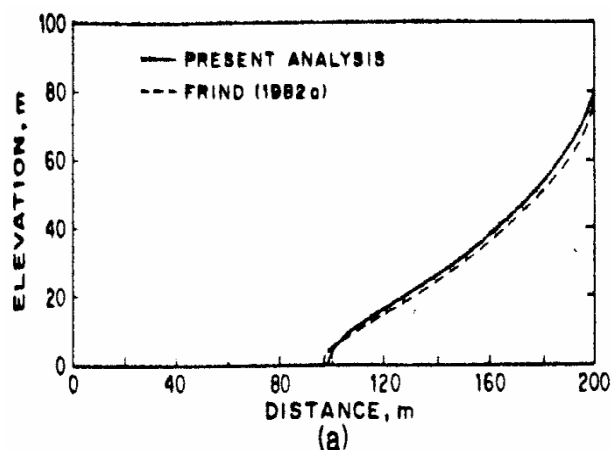
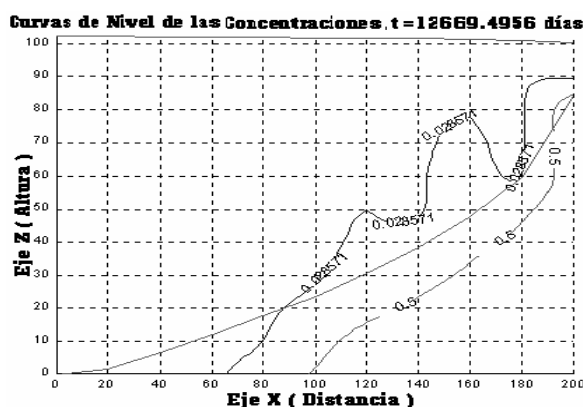
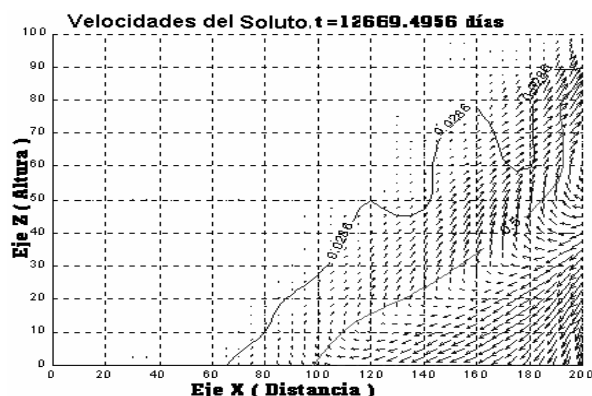
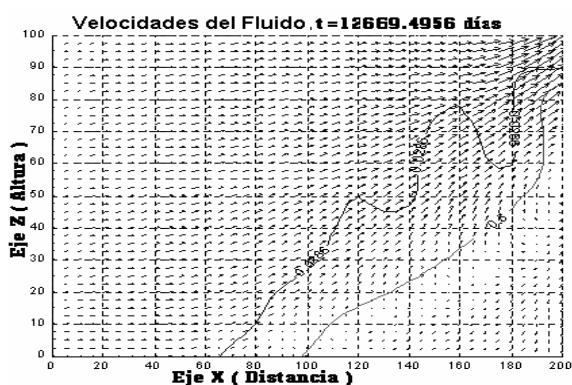


Figura 4. Campo de flujo del fluido y del soluto según el modelo desarrollado.



Como puede comprobarse de la Figura 2 las curvas de nivel de las cargas del modelo propuesto se ajustan bastante bien a las curvas de nivel de la carga del modelo de Huyakorn. De la Figura 3 se puede observar que la isoconcentraciones $C = 0.5$ del modelo propuesto tiene una buena coincidencia con la del modelo de Huyakorn. El pie de la cuña de

intrusión para el modelo propuesto se encuentra a la misma distancia del mar (100 m) que el pie de la cuña para el modelo de Huyakorn. El pie de la cuña de intrusión penetra una distancia mayor hacia adentro del acuífero que el pie de la cuña del modelo de dispersión. Puede verse también en la Figura 3 la comparación entre la isoconcentraciones $C = 1 \text{ Kg/m}^3$ y la curva de la

interfaz abrupta. La isoconcentración $C = 1$ puede ser identificada como la interfaz del modelo de dispersión.

CONCLUSIONES

El modelo 2D en el plano vertical es capaz de simular situaciones de contaminación con

densidad variable como es el caso de la intrusión salina, por lo tanto, la posibilidad de disponer de esta tecnología nacional así como la posibilidad real de su futura aplicación por primera vez en Cuba constituye el aporte fundamental de este modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEAR, J. ***Dynamics of fluids in porous media***. American Elsevier. 1972.

HUYAKORN, P.S. and PINDER, G.F. ***Computational methods in Subsurface flow***. Academic Press. 1983.

HUYAKORN, P. S. ; ANDERSEN, P. F.; MERCER, J. W. and WHITE, H., O. ***Saltwater intrusion aquifers: Development and testing of a three dimensional Finite Element Model.***, Water Resources Research . 23 (2). 1987.