

MATERIAL SUPLEMENTAR

APÊNDICE 2: Modelagem Termal - Conceitos e aplicações

Alguns conceitos básicos de modelagem termal são necessários para a elaboração dos modelos apresentados e discutidos no presente artigo científico. Os mesmos serão discutidos a seguir neste documento em anexo ao artigo.

O conhecimento da estrutura termal da Terra é indispensável para compreender seu comportamento mecânico, relacionada à reologia das rochas, que depende da temperatura, por sua vez, em função da profundidade. A distribuição da temperatura no planeta deve corresponder às entradas e saídas de calor do Sistema Terra. Tanto a produção como a redistribuição de calor na litosfera é feita a partir de três diferentes processos fundamentais: condução; convecção (ou advecção); e produção de calor (**Stüwe, 2007**). A transferência de calor ocorre pelos processos de condução, convecção e radiação, sendo os primeiros para meios sólidos e o último para gases e líquidos (**Carslaw & Jaeger, 1986**).

A transferência de calor por condução é um processo difusivo no qual as moléculas transmitem sua energia cinética para as outras moléculas por meio da propagação de colisões com estas últimas. A transmissão de calor por convecção (vertical) ou advecção (horizontal) é associada com o movimento de um meio (mais frio ou mais quente) em relação ao outro (**Turcotte & Schubert, 2002**).

O sol pode transmitir calor através da energia eletromagnética, todavia com menor relevância nos processos de transferência de calor terrestre. A radiação consiste de ondas eletromagnéticas viajando com a velocidade da luz. Como a radiação é a única forma de transferência de calor que pode ocorrer no espaço vazio, a mesma corresponde a principal forma pela qual o sistema Terra-Atmosfera recebe energia do Sol e libera energia para o espaço (**Carslaw & Jaeger, 1986**).

A manifestação dos processos magmáticos na crosta terrestre e seus efeitos na evolução geodinâmica de uma região em particular podem ser melhor compreendidos se analisados do ponto de vista de modelos numéricos, objetivando a descrição da variação temporal do campo de temperaturas associado (**Turcotte & Schubert, 2002**). A importância dos processos de condução e convecção varia em diferentes zonas do planeta (**Allen & Allen, 2004**). Na litosfera, a condução é o processo dominante no transporte de calor, já que essa é menos densa e quente que o manto sublitosférico, onde o processo predominante é a convecção, típico de zonas mais interiores e profundas da Terra. A convecção é um processo de transferência de calor muito mais rápido e eficiente que a condução. A lei de Fourier permite quantificar transferências de calor por condução por meio de equações de fluxo de calor, sendo o fluxo térmico Q diretamente proporcional ao gradiente de temperatura (**Stüwe, 2007**). A equação, em uma dimensão, toma a seguinte forma:

$$Q = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1)$$

Onde k é o coeficiente de condutividade, T é a temperatura em um determinado ponto no meio e y é a coordenada da direção da variação da temperatura.

A condutividade termal k é obtida quando as amostras de rochas são submetidas a um fluxo de calor conhecido, analisando-se a diminuição deste calor pela amostra. O fluxo de calor é expresso por unidades como mWm^{-2} ou $\text{cal cm}^2 \text{s}^{-1}$. Quando se trata de fluxo de calor na superfície, o mesmo é expresso em HFU (unidades de fluxo de calor). O valor de 1 HFU é equivalente a $10^{-6} \text{ cal cm}^{-2}$ ou $41,48 \text{ mWm}^{-2}$. A condutividade termal é expressa em unidades de Watts por metro centígrado ($\text{Wm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), ou $\text{cal cm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

A aquisição da temperatura pode ser feita em cavernas, minas, poços profundos e no assoalho oceânico (**Carslaw & Jaeger, 1986**). A medida da temperatura do assoalho oceânico é feita in situ. A sonda utilizada para medição de temperatura no fundo oceânico contém um sensor acoplado, que penetra os sedimentos. Atividade vulcânica ou regiões tectonicamente extensionais podem influenciar no fluxo de calor devido às altas temperaturas envolvidas nesses processos. Vale denotar que em regiões colisionais, o fluxo de calor varia de baixo a normal. O fluxo de calor em outras zonas distantes 7 destes eventos não está diretamente relacionado com o decaimento de isótopos radioativos que, no caso, são sua fonte de calor primária (**Carslaw & Jaeger, op. cit.**).

A perda de calor terrestre mais eficiente ocorre na superfície oceânica, aproximadamente 60% (**Stüwe, 2007**), em comparação com a crosta continental. O assoalho oceânico torna-se mais antigo e frio quanto mais afastado das dorsais meso-oceânicas. A produção de calor a cerca de três bilhões de anos atrás era duas vezes maior do que nos dias atuais (**Stüwe, 2007**). A razão está relacionada à quantidade de isótopos radioativos decaindo para isótopos estáveis, o que diminuiu o volume atual de isótopos radioativos. Uma vez que menos calor está sendo gerado (sabendo-se que o processo de convecção é dependente da viscosidade e a viscosidade do manto é sensível à temperatura), logo a taxa de transferência de calor também vem sendo reduzida, assim como a convecção mantélica. A segunda lei de Fourier descreve um balanço de energia. Essa energia relaciona o calor, a temperatura e a mudança do fluxo de calor com a variação da temperatura (**Stüwe, 2007**):

$$\frac{\partial T}{\partial t} \propto - \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (2)$$

A equação (2) indica que a taxa de variação da temperatura da rocha deve ser proporcional à taxa com que o conteúdo de calor muda. Esta taxa dada pela diferença entre o fluxo de calor para dentro da rocha e o fluxo de calor para fora da rocha.

Stüwe (2007) explica que se o fluxo de calor para dentro é maior do que o fluxo de calor para fora, então o conteúdo de calor crescerá e a sua temperatura aumentará. Se o fluxo de calor para dentro do volume é tão grande quanto o que flui para fora, a temperatura se manterá constante. Se mais calor flui para fora do cubo do que para dentro, a sua temperatura diminuirá. **Stüwe (op.cit.)** também relacionou a temperatura e o conteúdo de calor pela seguinte fórmula:

$$H = T\rho c_p \tag{3}$$

Onde H é o conteúdo de calor volumétrico ($J m^{-3}$), ρ é a densidade e c_p é a capacidade do calor específico ($J kg^{-1} K^{-1}$).

Se o calor específico de uma rocha é alto, muitos Joules são necessários para aquecê-la. E mesmo um rápido aumento do seu conteúdo de calor irá retardar o aumento da temperatura e vice versa. Portanto, a temperatura e quantidade de calor são inversamente proporcionais (**Stüwe, 2007**). Considerando que o balanço de energia na equação (2) é formulado em termos da coordenadas espacial z, e a capacidade de calor é formulada em termos de massa, pode-se multiplicar c_p com a densidade ρ . Assim, a relação entre o fluxo de calor e a mudança temporal da temperatura pode ser escrita:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{4}$$

O sinal negativo surge porque o aumento da temperatura quando $\partial Q = Q_{\text{externo}} - Q_{\text{interno}}$ é negativo, isto é, mais fluxo de calor para dentro da rocha do que para fora (**Stüwe, 2007**).

Stüwe (2007) substituiu a Primeira Lei de Fourier dentro do Balanço de Energia Termal e obteve a forma geral da difusão unidimensional ou equação de condução de calor:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} \tag{5}$$

Segundo o autor, se k é dependente de y , é possível simplificar (5) significativamente. K pode ser retirado do diferencial, podendo-se escrever:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \text{ ou } \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{6}$$

Onde k , ρ e c_p são resumidas por $\kappa = \frac{k}{(\rho c_p)}$

A equação acima expressa a difusividade termal e mesma corresponde à habilidade de o material ganhar ou perder calor por condução. Em palavras, (6) diz que a taxa de mudança da temperatura é proporcional à curvatura espacial do perfil de temperatura (**Stüwe, 2007**). A seguir, será discutida a equação unidimensional de condução de calor, essencial na

elaboração de modelos termais. A discussão será feita com base em um exemplo considerando a dimensão vertical δy de um elemento de volume (**Figura II.1**), com seção transversal de área a .

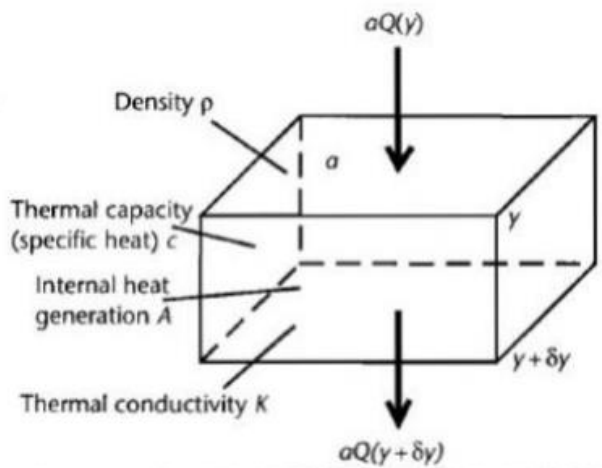


Figura II.1: Elemento de volume com dimensão vertical δy , área a , densidade ρ , calor específico c , condutividade térmica k e geração de calor interno A . O calor é conduzido somente na direção do fluxo (perfeitamente unidirecional). Retirada de **Allen & Allen (2004)**.

Allen & Allen (2004) assumiram que no topo da superfície do elemento há a entrada de um fluxo de calor $Q(y)$. O elemento possui uma geração de calor interno, densidade ρ e capacidade térmica (calor específico) dado por c . O calor específico representa a quantidade calorífica para elevar a temperatura por 1°C de 1kg de material (dado por unidades de $\text{Wkg}^{-1}\text{C}^{-1}$).

Em unidade temporal, a entrada de calor no elemento de volume é $aQ(y+\delta y)$ e a perda de calor do elemento é $aQ(y+\delta y)$.

A equação $Q(y+\delta y)$ pode ser expandida numa série de Taylor obtendo-se:

$$Q(y + \delta y) = Q(y) + \delta y \frac{\partial Q}{\partial y} + \dots \tag{7}$$

Com base nos dois termos da série de Taylor, a perda ou ganho de calor, é dada pela diferença dos fluxos de calor através do topo do elemento e fora da base do elemento (**Allen & Allen, 2004**).

$$aQ(y) - a \left\{ Q(y) + \delta y \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} = -a\delta y \frac{\partial Q}{\partial Y} \tag{8}$$

Allen & Allen (2004) denominam o calor gerado internamente por unidade de volume de A . O calor gerado no elemento de volume $a\delta y$ é então $Aa\delta y$. A perda ou ganho total por unidade de tempo é dada por:

$$Aa\delta y - a\delta y \frac{\partial Q}{\partial Y} \tag{9}$$

Segundo **Allen & Allen (2004)**, o material que forma o referido elemento de volume possui calor específico c e densidade ρ , sofrendo uma pequena variação de temperatura δT em um tempo curto δt , a taxa de calor (ganho ou perdido) é:

$$= ca\delta y\rho \frac{\partial T}{\partial t} \tag{10}$$

Conjugando equações (9) e (10), tem-se:

$$= ca\delta y\rho \frac{\partial T}{\partial t} = Aa\delta y - a\delta y \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{11}$$

Simplificando:

$$= c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = A - \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{12}$$

Substituindo a Lei de Fourier (1) em (12),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{\rho c} + \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{13}$$

há a obtenção da equação de condução de calor unidimensional. Encontra-se mais uma vez, portanto,

o termo para difusividade termal $\kappa = \frac{k}{(\rho c)}$.

Certas condições de contorno podem ser aplicadas na equação de condução de calor unidimensional, com o intuito de simplificá-la em algumas situações físicas ocorrentes na litosfera (**Stüwe, 2007**):

- I. Solução de estado estacionário em que não há mudança de temperatura com o tempo $\partial T/\partial t=0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{A}{k} \tag{14}$$

II. Geração de calor interno nula, $0=A$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{15}$$

, sendo esta a equação da difusão.

Vale destacar ainda casos em que o elemento de volume possa estar em movimento relativo ao seu entorno, alcançando regiões em que a temperatura varia com a profundidade. Se tal movimentação se dá a uma velocidade u_y na direção y (verticalmente na litosfera), a profundidade após um tempo t será dada por $u_y \partial T / \partial y$. Ocorre a necessidade, portanto, da alteração da equação de condução de calor unidimensional por meio da adição do termo advectivo (**Stüwe, 2007**).

A temperatura muda após um curto período de tempo δt e é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{A}{\rho c} - u_y \frac{\partial T}{\partial y} \tag{16}$$

A mudança da temperatura em parte da litosfera é composta de três componentes: um termo de fluxo de calor basal, um termo de geração de calor interna e um termo advectivo. O movimento de advecção pode ocorrer pela superfície do elemento de volume associado com a ação de redução pela taxa de erosão, por exemplo. Ou, ainda, em antemão a velocidade de deposição (**Stüwe, 2007**). Ao se adotar uma relação de tempo e fluxo térmico, pode ser utilizada a solução da equação da variação da temperatura T , em coordenadas cartesianas, no tempo e no espaço:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T \tag{17}$$

Dentro do contexto da equação acima (17), k é a condutividade térmica, c_p é o calor

específico e ρ a densidade do material. Esta equação pode ser obtida de forma analítica (**Carslaw & Jaeger, 1986**) ou por meio de métodos numéricos específicos, como o método dos elementos finitos (**Beardsmore & Cull, 2001**), possibilitando a compreensão da variação da temperatura nos processos de resfriamento de magmas (plutonismo, vulcanismo, hidrotermalismo) e metamorfismo em relação às rochas encaixantes.

O transporte de calor ativo terrestre através da advecção pode ser diferenciado da convecção, devido o primeiro ser geralmente usado se o transporte ativo de calor é apenas em uma direção, a exemplo do transporte de calor por uma intrusão que se move verticalmente. Sendo assim, o termo convecção é utilizado quando se refere ao transporte de material em circuito fechado. Por exemplo, a convecção do material mantélico na astenosfera ou de fluidos em um sistema hidrotermal (**Stüwe, 2007**). É importante ressaltar que a equação de transporte possui uma maneira mais complexa de ser resolvida do que pela equação de difusão (6), já que em soluções numéricas de problemas advectivos há o confronto com problemas de difusão numérica. Uma maneira de evitar esse tipo de obstáculo é converter um problema de advecção em um onde não há advecção, utilizando-se condições de contorno (**Stüwe, op. cit.**).

A modelagem matemática é utilizada quando a idealização do problema físico, com limitantes (matemáticas) bem definidas e representando as principais características, é alcançada (**Oliveira, 2013**). Existem diversos tipos de modelagem matemática na literatura que podem ser utilizados para a análise dos efeitos térmicos. A manifestação dos processos magmáticos na crosta terrestre e seus efeitos na evolução geodinâmica de uma região em particular, por exemplo, podem ser melhores compreendidos se analisados do ponto de vista de modelos numéricos, objetivando a descrição da variação temporal do campo de temperaturas associado (**Turcotte & Schubert, 2002**).

As soluções analíticas são as melhores soluções para os problemas, mesmo não sendo acuradas como as soluções numéricas, mas são mais rigorosas com relação aos parâmetros e a maneira explícita que a solução é apresentada (**Oliveira, 2013**). A maior parte dessas soluções consiste na resolução de equações parciais diferenciadas em um sólido homogêneo sobre condições iniciais e de contorno apropriadas.

Como um exemplo de solução analítica, a partir da equação (1), também conhecida como *equação de Fourier* ou da condução de calor, é possível observar a influência térmica na rocha encaixante, na **Figura II.2**, após certo tempo pós-intrusão. A derivada segunda determina em qualquer ponto a taxa em que a temperatura varia, segundo a equação de Fourier. Ou seja, enquanto a rocha encaixante recebe o máximo de calor no ponto A, o magma perde o máximo de calor em B (**Figura II.1**). O gradiente térmico varia com o tempo, logo, as posições desses máximos também irão mudar. Devido ao fato da derivada segunda ser zero, a temperatura no contato permanecerá constante enquanto magma e a rocha encaixante mantiverem suas temperaturas iniciais (**Philpotts, 1990 in Corrêa, 2007**).

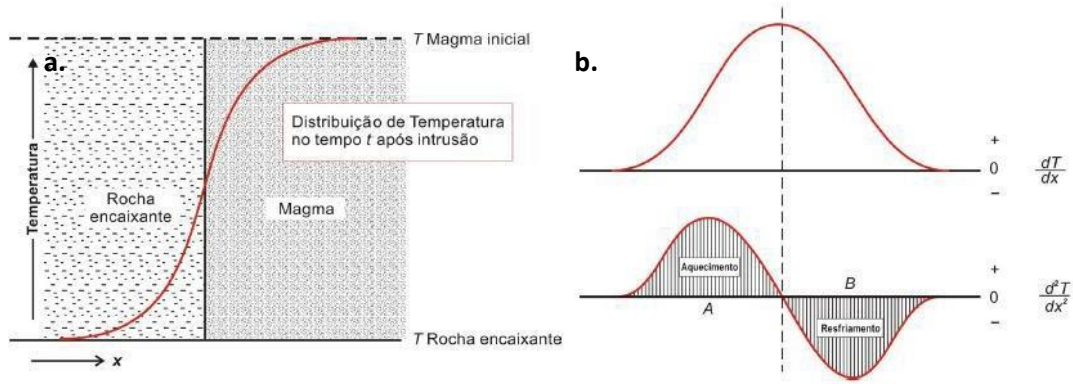


Figura II.2: a) Distribuição da temperatura nas proximidades de um contato ígneo certo tempo após a intrusão. b) Derivadas primeira e segunda da temperatura em função da distância. A taxa máxima de resfriamento ocorre quando a derivada segunda é mais negativa, e a taxa máxima de aquecimento ocorre quando esta é mais positiva. (Corrêa, 2007).

Carslaw & Jaeger (1986) propuseram a derivação da equação (1), assumindo que o magma e a rocha encaixante possuem a mesma condutividade térmica K . A partir da solução dada pela aplicação da função erro é possível calcular uma temperatura T em um instante t a uma distância x :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}} \right) \quad (18)$$

Todavia, a solução supracitada não leva em conta o calor latente de fusão/cristalização do magma. Esta cristalização ocorre por meio de reações exotérmicas e para considerar esse calor adicional no modelo e obter uma taxa de resfriamento mais próxima da real, pode-se substituir T_0 por $(T_0 + L/C_p)$ na temperatura inicial do magma, sendo L o calor latente de fusão/cristalização e C_p capacidade térmica do magma. Neste caso, a superfície de solidificação migra com o tempo em direção ao centro da soleira.

A solução deste problema só é válida até o ponto x onde o magma ainda possui a sua temperatura inicial T_0 , próximo ao centro da intrusão. Para resolver essa barreira, **Carslaw & Jaeger (1986)** apresentam uma solução para uma intrusão do tipo soleira, com espessura $2a$, na qual a distância, x , é medida a partir do centro da intrusão:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{a-x}{2\sqrt{Kt}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{a+x}{2\sqrt{Kt}} \right) \right] \quad (19)$$

As soluções analíticas não necessitam de muito tempo na fase elaboração do modelo e os parâmetros podem ser facilmente ajustados para se adequar a diferentes casos tornando-as uma ferramenta eficiente e rápida (**Oliveira, 2013**).

As soluções numéricas transformam um problema contínuo em um problema discreto, assim, permitindo encontrar uma solução em cada ponto do sistema, a cada instante e a cada valor de parâmetro, ou seja, possui uma solução discreta (**Oliveira, 2013**). O método numérico é capaz de resolver qualquer tipo de problema, independente da complicação que ele possa possuir e pode ser refinado o tanto quando desejado pelo operador (ao custo de tempo de processamento computacional) (**Oliveira, 2011**).

Estes métodos envolvem a tradução de equações diferenciais em um conjunto de equações lineares simultâneas em uma forma de diferenças finitas, onde os cálculos gradualmente convergem para uma solução estável, através de interações numéricas. As incógnitas nestas equações são os valores numéricos das variáveis dependentes (temperatura), uma para cada incremento das variáveis independentes (tempo e distância), sendo que o número de equações é igual ao número de incógnitas (**Corrêa, 2007**).

A fim de analisar quantitativamente o magmatismo da crosta terrestre e sua influência nos sistemas petrolíferos de uma região, **Oliveira (2013)** utilizou um método de análise da variação de temperatura em função do tempo. Serão apresentadas abaixo algumas propostas de modelagem parasituações geológicas.

A primeira proposta consiste em resolver a equação (17) pelo método de separação de variáveis para quantificar a evolução térmica das intrusões. Segundo **Stüwe (2002, in Oliveira, 2013)**, quando se utiliza a equação (17) para descrever um problema de condução dependente do tempo, é necessário resolvê-la para um grupo de limites e condições de contorno iniciais, mas é de fácil percepção que isso só é possível para poucos limites e condições iniciais. Para diversos problemas geológicos é interessante assumir que as condições dos limites irão até o infinito (distâncias bem maiores se comparadas com a escala do problema). Nesse tipo de problema, os resultados da integração de (17) irão conter o termo:

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^n e^{-n^2} dn = \text{erf}(n) \tag{20}$$

Essa integral não tem solução, mas por aparecer frequentemente nas soluções da equação de fluxo do calor, é chamada de função erro. Os diferentes valores de n podem ser obtidos em tabelas ou calculados numericamente. A função erro complementar (*erfc*) é definida como:

$$\text{erfc}(n) = 1 - \text{erf}(n) \tag{21}$$

Também é necessário definir uma escala de tempo característica r como o tempo necessário para a mudança da temperatura se propagar a uma distância l em um material com uma difusividade termal k (unidades de distância² tempo⁻¹):

$$r = \frac{l^2}{k} \tag{22}$$

A escala de comprimento $l = \sqrt{kr}$ dá a distância que a temperatura se propaga em um tempo r . É conhecida com a distância da difusão termal.

A solução para a temperatura em função do tempo é dada por:

$$\theta = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) \tag{23}$$

onde, no denominador, se encontra na forma da distância da difusão termal, *erfc* é a função erro complementar, x é a distância horizontal e t é o tempo após a intrusão e θ é a taxa de temperatura na forma adimensional representada por:

$$\theta = \frac{T - T_b}{T_i - T_b} \tag{24}$$

onde T_i é a temperatura da intrusão, T_b é a temperatura da rocha encaixante e T é a temperatura em um tempo t .

Tendo em consideração as informações supracitadas é possível resolver a equação (17) para determinadas condições de iniciais e de contorno específicas.

Ao assumirmos condução unidirecional, podemos escrever:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (25)$$

Admitindo as seguintes condições iniciais de contorno:

- a) $T = T_1 \quad t = 0 \quad y > 0;$
 - b) $T = T_1 \quad y = 0 \quad t > 0;$
 - c) $T \rightarrow T_1 \quad y \rightarrow \infty \quad t > 0;$
- (26)

Usando a similaridade, temos θ como o termo da razão adimensional da temperatura, logo:

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad (27)$$

Assim,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 y} \quad (28)$$

Deste modo, as condições de contorno assumem a forma:

- a) $\theta(y, 0) = 0;$
 - b) $\theta(0, t) = 1;$
 - c) $\theta(\infty, t) = 0;$
- (29)

Baseando-se na ideia de um problema com apenas uma escala de comprimento, podemos determinar θ por similaridade, assim sendo o único termo com as mesmas dimensões que y é $\sqrt{\kappa t}$,

que caracteriza a Distância de Difusividade Termal (Turcotte & Schubert, 2002). Desta forma, temos que θ está em função do termo adimensional.

$$n = \frac{y}{2\sqrt{kt}} \tag{30}$$

Podemos reescrever as equações 27 e 28 em termos de n . Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \left[-\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{kt} t} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial n} \left(-\frac{1}{2} \frac{n}{t} \right) \tag{31}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{1}{2\sqrt{kt}} \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{2\sqrt{kt}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{4kt} \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \tag{33}$$

Substituindo na Equação 28,

$$-n \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \tag{34}$$

Assumindo as seguintes condições de contorno:

a) $\theta(\infty) = 0$;

b) $\theta(0) = 1$; (35)

Introduzindo

$$\phi = \frac{\partial \theta}{\partial n} \tag{36}$$

Podemos integrar (34) e obter

$$-n\phi = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (37)$$

Rearranjando,

$$-n\partial n = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\phi} \quad (38)$$

Tendo que $\ln \phi = (-n^2 + \ln c_1)$ e $\phi = c_1 \exp(-n^2)$, assim podemos escrever que

$$-n^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad (39)$$

Onde $-\ln c_1$ é uma constante de integração.

Se,

$$\phi = c_1 \exp(-n^2) = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (40)$$

Integrando a Equação (40), temos

$$\theta = c_1 \int_0^n \exp(-n^2) \partial n + 1 \quad (41)$$

Sendo $\theta(\infty) = 0$,

$$\int_0^\infty \exp(-n^2) \partial n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (42)$$

Então, a constante c_1 é $-\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)$ e

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n \exp(-n^2) \partial n \quad (43)$$

Definindo a função erro

$$\text{erf}(n) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n \exp(-n^2) \partial n \quad (44)$$

Podemos, então, escrever a seguinte equação, onde $\text{erfc}(n)$ é a função erro complementar.

$$\theta = 1 - \text{erf}(n) = \text{erfc}(n) \quad (45)$$

Em termos das variáveis originais temos:

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{kt}}\right) \quad (46)$$

$$T = T_1 + (T_0 - T_1) \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{kt}}\right) \quad (47)$$

No entanto, para o resfriamento normal da superfície de uma intrusão será considerado um sistema de coordenadas com origem no centro de uma intrusão que apresenta metade da sua espessura com valor igual a w . Devido ao grande contraste de temperatura da intrusão e a rocha hospedeira, assume-se que $T_1 = 0$ e para as condições de contorno iniciais tem-se:

a) $T = T_0$ em $t = 0$ para $y \leq w$;

b) $T = 0$ em $t = 0$ e $|y| > w$;

(48)

Assim, a solução da equação (17) pode ser escrita da seguinte forma (**Fowler, 2005 in Oliveira, 2013**):

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{w + y}{2\sqrt{kt}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{w - y}{2\sqrt{kt}} \right) \right] \quad (49)$$

Na equação (49), as fronteiras do problema não são conhecidas ou não tem significado para o mesmo. **Oliveira (2013)** também utilizou uma equação proposta por **Stüwe (2002)** para realizar a modelagem de múltiplas intrusões:

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z - (z_n - 0.5l_n)}{\sqrt{4kt}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{(z_n + 0.5l_n) - z}{\sqrt{4kt}} \right) + \dots \right) \quad (50)$$
$$\theta = (T - T_b) / (T_i - T_b)$$

Onde θ é a temperatura normalizada, N é o número de intrusões, T_i e T_b são as temperaturas da intrusão e da encaixante respectivamente, z é a profundidade, z_n é a profundidade da intrusão e l_n é a espessura da intrusão.

Por meio dessas soluções, tornou-se possível a construção de modelos unidirecionais (1D) para fluxos térmicos (utilizando as equações 49 e 50) entre os diques e as rochas encaixantes com o pacote computacional MATLAB. Esses modelos fornecem gráficos que confrontam temperatura e distância, por meio das variáveis tempo e espessura da intrusão, permitindo a análise do fluxo térmico associado ao efeito das intrusões nas rochas hospedeiras.

OBSERVAÇÃO: Citações de trabalhos da literatura realizadas neste apêndice constam na lista de referências bibliográficas do artigo.