ESTIMATIVAS VOLUMÉTRICAS DE ÁRVORES INDIVIDUAIS — SÍNTESE TEÓRICA

Sylvio Péllico Netto*

ABSTACT

Volume estimates of individual trees can be obtained through four main methods: 1. Formfactor, 2. Volume equations, 3. Absolut taper functions and 4. Relative taper functions. The four methods are theoretically discussed in this paper and exemplified with the more expressive applications already found in the literature.

1. INTRODUÇÃO

A estimativa de volumes de árvores quer total ou parcial tem sido exaustivamente pesquisado e encontra-se amplamente apresentado na literatura. Fundamentalmente pode-se formalizar a existência de quatro processos para se resolver este problema:

I — Através do Cálculo de um Fator de Forma
II — Através de Equações Volumétricas
III — Através de Série Absoluta Contínua de Forma.
IV — Através de Série Relativa Contínua de Forma.

2. FATOR DE FORMA

Neste processo o volume de uma árvore é estimado através de uma equação volumétrica resolvida em função das variáveis diâmetro, altura e uma outra variável que exprima a forma da árvore, funcionando como um fator de redução. Este é o mais antigo processo para se estimar o volume e foi concebido, valendo-se do princípio geométrico da rotação dos corpos.

$$V_1 = \frac{\pi}{4} d_x^2 . h . \lambda_x \qquad (1)$$

onde:

x = variável contínua tal que $0 \leq x \leq h$

V_1 = volume da árvore

d_x = diâmetro, geralmente medido com casca um ponto x da árvore. Por convenção internacional toma-se 1,30m e $d_{1,30}$ = DAP.

h = Altura da árvore. No caso do volume parcial usa-se h_D ou h_c.

λ_x — variável complementar de redução ou correção da forma.

Denominando-se

$$W_x = \frac{\pi}{4} . d_x^2 . h \qquad (2)$$

como o volume de um cilindro tomado na base x, tem-se que

$$V_1 = W_x . \lambda_x \qquad (3)$$

Teoricamente pode-se observar que isolando-se λ_x na igualdade (3), tem-se que

$$\lambda_x = \frac{V_1}{W_x} \qquad (4)$$

Esta relação depende portanto, do conhecimento do volume real da árvore V_1, para que se possa obter uma distribuição estatística de λ_x.

Prodan (1965) apresenta a teoria para se obter este volume real, onde uma sucessão de diâmetros d_x é medida em intervalos de um tamanho tão pequenos quanto se queira, obtendo-se portanto o volume real da árvore por integração.

* Professor titular de Biometria e Inventário Florestal da Faculdade de Florestas da Universidade Federal do Paraná.

$$V_1 = \frac{\pi}{4} (d^2_1 + d^2_2 + \ldots\ldots + d^2).t$$

$$V_1 = \pi \left(\frac{d^2_1}{4} + \frac{d^2_2}{4} + \frac{d^2_3}{4} \ldots + \frac{d^2}{4}\right)t$$

$$= \pi (y^2_1 t + y^2_2 t + y^2_3 t + \ldots + y^2_k t)$$

$$V_1 = \pi \int_0^T y^2 \, d_y \qquad (5)$$

onde $t = d_y$ infinitamente pequeno.

Na prática tal solução não é exequível e o que se faz normalmente é tomar t como uma medida finita e plausível a fim de que seja atendida a condição estatística de aceitável precisão por um número mínimo de diâmetros distribuídos ao longo de todo o fuste. Nestas condições, tem-se que:

$$V_1 = \sum_{x=0}^{L} y^2 \cdot \Delta_y \qquad (6)$$

onde

$$t = \Delta_y$$

São conhecidos na literatura e do constante uso prático, vários métodos para se obter uma estimativa de V_1, sendo os mais conhecidos os de Smallian, Huber e Newton.

A partir desta distribuição estatística, torna-se possível obter a distribuição de y. Particularmente importante neste consenso, destaca-se o método de Hohenadl, que resulta no fator de forma natural, através da tomada dos diâmetros sempre em termos relativos do fuste, o que permite ser sempre comparável em qualquer das condições dimensionais do tronco.

a) Fator de forma natural de Hohenadl

$$\lambda_x = \frac{V_1}{W_x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \qquad (7)$$

onde

n = número de secções relativas tomadas na árvore

$$\eta_i = \frac{d_x}{d_{0,i}} \qquad \text{para } i = \text{fração de } h$$

No caso de 0,i = 0,1 e n = 5 tem-se que $d_{0,l} = d_{0,1}$, $W_x = W_{0,1}$. e

$$\lambda_{0,9} = 0{,}2 \left[1{,}000 + \left(\frac{d_{0,7}}{d_{0,9}}\right)^2 + \left(\frac{d_{0,5}}{d_{0,9}}\right)^2 + \left(\frac{d_{0,3}}{d_{0,9}}\right)^2 + \left(\frac{d_{0,1}}{d_{0,9}}\right)^2 \right] \qquad (8)$$

b) Fator de forma artificial.

Este é sempre obtido em função do DAP.

Então:

$$\lambda_{1,30} = f_{1,30} = \frac{V_1}{W_{1,30}} \quad (9)$$

Dado o fator de forma artificial ser mais aplicado na prática que o fator de forma natural, um relacionamento entre eles pode ser obtido como segue

$$V_1 = W_{1,30} \cdot \lambda_{1,30} = W_{0,9} \cdot \lambda_{0,9} \quad (10)$$

Portanto

$$\lambda_{1,30} = \frac{W_{0,9}}{W_{1,30}} \cdot \lambda_{0,9} = \frac{d^2_{0,9}}{d^2_{1,30}} \cdot \lambda_{0,9}$$

$$= \left(\frac{d_{0,9}}{d_{1,30}}\right)^2 \cdot \lambda_{0,9}$$

Definindo-se $K_{0,9/1,30}$ como quociente de forma natural tem-se que

$$\lambda_{1,30} = K^2_{0,9/1,30} \cdot \lambda_{0,9} \quad (11)$$

Igualmente pode-se calcular o fator de forma natural como função do fator de forma artificial, valendo-se do quociente de forma artificial.

$$\lambda_{0,9} = K^2_{1,30/0,9} \cdot \lambda_{1,30} \quad (12)$$

3. EQUAÇÕES VOLUMÉTRICAS

Observando-se a solução do fator de forma pode-se ver que λ_x pode ser estimado através de uma função $\lambda_x = f\ (d,h,Z)$, ou $\lambda_x = f\ (d,h)$, ou apenas $\lambda_x = f\ (d)$, então é possível obter uma função matemática, que permita posteriormente ser ajustada em função somente da variável diâmetro no caso adicional da variável altura ser obtida em função do diâmetro.

Neste caso

$$\lambda_x = f\ (d) \text{ e } h = f\ (d) \quad \text{então} \quad (13)$$

$$V_2 = f\ (d)$$

No caso de $\lambda_x = f\ (d,h)$ e $h = f\ (d)$ então

$$V_2 = f\ (d,h) \quad (14)$$

Finalmente quando $\lambda_x = f\,(d, h, Z_x)$

ou $\lambda_x = f\,(d, z_x)$ então

$$V^2 = f\,(d, h, Z_x) \tag{15}$$

Z_x = Qualquer característica adicional medida na árvore.

onde

Dependendo da formulação proposta para o ajustamento de λ_x, a variável Z_x pode aparecer nas funções volumétricas em quatro formas: como variável adicional, variável combinada ou transformada, quocientes de forma e fatores de forma

a) Variável Adicional

A variável Z_x neste caso é tomada adicionalmente na árvore, por exemplo como:

h_k = altura da copa, tomada do chão até o início desta.

$d_{0,5h}$ = diâmetro medido na metade da altura da árvore.

d_7 = diâmetro medido a 7m de altura.

C = dupla largura da casca medida no DAP.

k_x = relação entre dois diâmetros, denominada de quociente de forma.

$k_x = \dfrac{d_x}{d_{0,1}}$ e pode ser amplamente definido como variável auxiliar, dependendo da bondade de seu significado na análise de dados obtidos de espécies de interesse particular.

b) Variável Combinada ou Transformada

Neste caso, as funções compõem-se adicionalmente de variável Z_x na forma combinada, depois de sua derivação teórica por exemplo como:

$Z_x = d^2 h,\ d.h^2,\ \log d,\ \log h,\ d.h.C,\ d.d_{0,1}.h,\ d^2h_x$ etc.

c) Quocientes de Forma

A avaliação da importância dos quocientes de forma k_x como variável auxiliar na estimativa volumétrica, foi iniciada por Schiffel (1899), com a seguinte proposição:

$$K_{0,25h/1,30} = \frac{d_{0,25h}}{d} \tag{16}$$

$$k = \frac{d_{0,5}}{d} \tag{17}$$

$$K_{0,75h/1,30} = \frac{d_{0,75h}}{d} \tag{18}$$

A partir destes quocientes Schiffel estabeleceu as seguintes relações:

$$K_{0,25h/1,30} = 0,61 \ k + \frac{0,41}{k.h} + 0,41 \tag{19}$$

$$K_{0,75h/1,30} = 0,865 \ k - \frac{0,20}{k.h} - 0,14$$

Com a denominação de "quociente absoluto de forma, onde o diâmetro superior tomado na metade do comprimento entre o DAP e a altura da árvore, apresentou JONSON (1910) um novo conceito para o quociente de forma.

$$Ka = \frac{d_{0,5(h+1,30)}}{d} \tag{20}$$

Após o desenvolvimento do conceito de fator de forma natural devido a Hoheṇadl (1924), ficou generalizado o amplo uso de quocientes de formas naturais generi camente como

$$k_{0,i/0,1h} = \frac{d_{0,1h}}{d_{0,1h}} = \eta_i \tag{21}$$

Com o objetivo de construir tabelas de volumes comerciais nos Estados Unidos, Girard (1933) desenvolveu a concepção de um quociente de forma, que é obtido pela relação entre o diâmetro tomado no topo da primeira tora, sem casca (d_u) e o DAP com casca.

$$K_G = \frac{d_u}{d} \tag{22}$$

Destacam-se ainda mais recentemente a generalização dos quocientes artificiais de forma tomados em alturas absolutas das árvores (5m, 7m etc.), Mitscherlich (1942)

$$K_i = \frac{d_i}{d} \tag{23}$$

e o de Pollanschütz (1965)

$$K_{0,3/1,30} = \frac{d_{0,3h}}{d} \tag{24}$$

d) Fatores de Forma

Importante para a evolução das equações volumétricas, foi o desenvolvimento das funções que expressam a forma da árvore.

A mais antiga igualdade foi apresentada por Kunze (1891).

$$f = K - c \qquad (25)$$

Mais adiante, outras relações foram amplamente desenvolvidas na literatura, destacando-se as seguintes:

$$f = a + b \cdot k + \frac{c}{k.h} \qquad \text{Schiffel (1899)} \qquad (26)$$

$$f = a + b \cdot k^2 + \frac{c}{k.h} \qquad \text{Schiffel (1899)} \qquad (27)$$

$$f = a + b\,k + c\,k^2 \qquad \text{Simony (1904)} \qquad (28)$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{s} \eta_i^2 \qquad \text{Hohenadl (1924)} \qquad (29)$$

$$f = a + b\,k_{0,5h/0,1h} + c\,k^2_{0,5h/0,1h} \qquad \text{Prodan (1944)} \qquad (30)$$

$$f = a + b\,k_{0,5h/0,1h} \qquad \text{Prodan-Krenn (1944)} \qquad (31)$$

$$f = a + b \cdot k^2_{0,3h/1,30} + c\,\frac{h}{d^2} \qquad \text{Polanschütz (1961)} \qquad (32)$$

$$f = a + b \cdot k^2_{0,3h/1,30} + C\,k_{0,1/1,30} \cdot K + d \cdot \frac{h}{d^2} \qquad \text{Polanschütz (1065)} \qquad (33)$$

e outros

As funções volumétricas são finalmente obtidas pela substituição da função de forma na função de volume e resolvida para sua forma mais simples.

Um desenvolvimento teórico para a obtenção de uma nova função volumétrica, partindo-se da bondade dos ajustamentos, pode ser encontrada em Ogaya (1968).

Quadro 1: Sumarização das Funções Volumétricas apresentadas por Loetsch et. allii (1973)

VARIAV. IND.	AUTOR	FUNÇÕES
d	Kopezky — Gehrhardt	$V = \beta_0 + \beta_1 d^2$
	Dissescu — Meyer	$V = \beta_1 d + \beta_2 d^2$
	Hohenadl- Krenn	$V = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2$
	Berkhout	$V = \beta_0 d \beta_1$
	Husch	$\log V = \beta_0 + \beta_1 \log d$
	Brenac	$\log V = \beta_0 + \beta_1 \log d + \beta_2 \frac{1}{d}$
d, h	Spurr	$\nu = \beta_1 d^2 h$
	Spurr	$V = \beta_0 + \beta_1 d^2 h$
	Ogaya	$V = d^2 (\beta_0 + \beta_1 h)$
	Stoate	$V = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 h$
	Näslund	$V = \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 dh^2 + \beta_4 h^2$
	Meyer	$V = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \beta_3 dh + \beta_4 d^2 h + \beta_5 h$
	Meyer	$V = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \beta_3 dh + \beta_4 d^2 h$
	Takata	$V = \frac{d^2 h}{\beta_0 + \beta_1 d}$
	Schurmacher — Hall	$\log V = \beta_0 + \beta_1 \log d + \beta_2 \log h$
	Spurr	$\log V = \beta_0 + \beta_1 \log(d^2 h)$
	Prodan (B.W.)	$\log V = \beta_0 + \beta_1 \log d + \beta_2 \log^2 d + \beta_3 \log h + \beta_4 \log^2 h$
d, h, h_c C	Näslund (spruce)	$V = \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 dh^2 + \beta_4 h^2 + \beta_5 d^2 h_c$
	Näslund (pinus)	$V = \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 dh^2 + \beta_4 d^2 h + \beta_5 dh.C$
	Näslund (birch)	$V = \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 dh^2 + \beta_4 h^2 + \beta_5 dh.C$
d,h k_i ou d_i ou $d_{0,3h}$	Spurr	$V = \beta_0 + \beta_1 . k_i d^2 h = \beta_0 + \beta_1 d_i d.h$
	Spurr	$V = \beta_0 + \beta_1 k_i + \beta_2 d^2 h + \beta_3 k_i d^2 h$
	Schiffel	$V = d^2 h(\beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 \frac{1}{kh}$
	Ogaya	$V = \beta_0 + \beta_1 d_{0,5h} d.h$
	Pollanschütz	$V = \frac{\pi}{4} (\beta_0 d^2 h + \beta_1 d\, d_{0,3h} h + \beta_2 h^2)$
	Schmid	$V = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_3 d_7 + \beta_4 dh + \beta_5 d^2$ $+ \beta_6 h^2 + \beta_7 d_7^2 + \beta_8 h d_7^2 + \beta_9 d^2 d_7 +$ $+ \beta_{10} dh^2 d_7$
	Spurr	$\log V = \beta_0 + \beta_1 \log d + \beta_2 \log h + \beta_3 \log d_i$
	Spurr	$\log V = \beta_0 + \beta_1 \log(d_i dh)$

LOETSCH, ZOHRER e HALLER (1973) agruparam as funções mais importantes até aquela data existentes, segundo uma ordem de participação das variáveis independentes na sua forma final derivada. Esta é uma síntese muito funcional para o usuário na prática está apresentada no quadro 1.

4. SÉRIE ABSOLUTA CONTÍNUA DE FORMA

O volume da árvore é estimado indiretamente através do ajustamento de uma função contínua que descreva a forma da árvore, solucionada em função das variáveis diâmetro, altura da árvore e eventualmente uma ou mais variáveis auxiliares. Genericamente pode-se apresentar este processo como segue.

$$d = f \ (d,h,Z_x) \qquad (34)$$

Neste caso

d = diâmetro sem casca na altura h_x tal que x seja uma variável contínua $0 \leq x \leq 1$

O volume é obtido então

$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^h d_x^2 \, d_d \qquad (35)$$

Este processo é pouco usado na prática, dado a dificuldade de se atender numa única função todas as variações ocorrentes. Grosenbauch (1966) esclarece as dificuldades para conseguir uma função matemática capaz de atender esta condição, salientando os efeitos que variações dos parâmetros diâmetro, altura e forma exercem sobre os coeficientes de uma função polinominal qualquer.

Uma aplicação deste processo foi proposta na avaliação de volumes parciais, correspondentes à classificação das árvores em classes de qualidade, para a Araucaria angustifolia e para um grupo de espécies de folhosas, avaliados no inventário do Pinheiro no Sul do Brasil, FUPEF (1978).

A solução proposta baseou-se no denominado "Gray's taper line", que absorve parte da grande variação exercida pelas diferenças das variáveis diâmetro e altura na função ajustada. Esta solução exige duas etapas de ajustamentos

a) A função que descreve a forma é dada por

$$d_x = a + b.h_x \qquad (36)$$

onde as constantes a e b não são aplicadas para todos os casos, mas sim são assumidas como variáveis tomadas como função do diâmetro e altura das árvores medidas.

b) Os coeficientes a e b são então ajustados para absorver as discrepâncias existentes nas classes diamétricas, tal que

$$a = f \ (d,h) \quad \text{e} \quad b = f \ (d,h)$$

No caso do sul do Brasil foram propostos os modelos

$$a = \alpha_0 . d^{\alpha_1} . h^{\alpha_2} \qquad (37)$$

e

$$b = \beta_0 \, d^{\beta_1} . \, h^{\beta_2} \qquad (38)$$

No inventário do Pinheiro resultou para uma amostragem em todo o Sul do Brasil

b1) Para a Araucária

$$a = 1{,}20627 \ . \ d^{0{,}9855} \ . \ h_c^{-0{,}0531} \qquad (39)$$

$$b = 0{,}89864 \ . \ d^{-0{,}0360} \ . \ h_c^{0{,}0283} \qquad (40)$$

b2) Para um grupo de folhosas

$$a = 1{,}2124 \ . \ d^{0{,}9975} \ . \ h_c^{-0{,}0606}$$

$$b = 0{,}8994 \ . \ d^{-0{,}0584} \ . \ h_c^{0{,}0317} \qquad (42)$$

5. SÉRIE RELATIVA CONTÍNUA DE FORMA

O volume neste processo é estimado através do ajustamento de uma função que descreva a forma da árvore, equacionada para uma série relativa de diâmetros como função de uma série relativa de alturas.

$$A_x = f\ (B_x) \qquad (43)$$

onde

$A_x = \dfrac{d_x}{d_{0,1}}$ série relativa contínua de quocientes de forma, onde $d_{0,1}$ é previamente escolhido, tal que

$B_x = \dfrac{h_x}{h}$ série relativa dos quocientes das alturas

O volume é obtido por

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot h \int_0^1 [f(x)]^2 d_x \qquad (44)$$

A tentativa de estabelecer um relacionamento entre estas séries relativas foi iniciada por Altherr (1953) que construiu um sistema baseado no princípio da régua de cálculo, onde diâmetros e alturas são obtidos em valores absolutos a partir de seus valores relativos.

Mais tarde foi proposto por outros autores a possibilidade de relacioná-la através de uma função polinomial. Osumi (1959) aplicou tal conceito para a espécie Criptoméria japônica tendo-o solucionado através de um polinômio do 3º grau. Wutt (1961), Prodan (1965), Schöpfer (1966) e Peters (1971) propuseram para diferentes espécies o ajustamento de um polinômio do 5º grau, que apresenta a vantagem de descrever a forma com uma única função, facilitando sua integração e resulta em boa precisão.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 + fx^5 \qquad (45)$$

onde

$$y = \frac{d_x}{d_{0,1}} = A_x \qquad e \qquad x = \frac{h_x}{h} = B_x$$

Peters (1971) aplicou tal processo no estudo do gênero Araucária com bons resultados — Araucária araucana originária do Chile.

Munro (1968) propos este processo para coníferas no Canadá onde o diâmetro d sem casca foi resolvido através de uma função parabólica.

$$\frac{d_x}{d} = a + b \cdot \frac{h_x}{h} + c \cdot \frac{h_x^2}{h^2} \qquad (46)$$

ou

$$y^2 = a + b + cx^2 \qquad (47)$$

Observe que a série relativa dos diâmetros neste caso foi tomada, em relação ao DAP, ou seja uma série artificial.

Afirma Munro (1968) que é possível obter estimativas de d_x dentro do intervalo de $\pm$ 3 cm com esta função. Afirma entretanto Prodan (1965), que o ajustamento de um polinômio do 3º grau para a espécie Fichte não resultou em boas estimativas para d_x.

Mais recentemente um novo conceito sobre a aplicação deste processo foi desenvolvido por Preußer (1974). Seu método consistiu em subdividir a curva de forma em 4 partes distintas tendo cada parte sido equacionada como uma parábola e sua série diamétrica foi tomada como função do diâmetro na metade da altura ($d_{0,5h}$). Suas funções propostas são:

$$Y_1 = a_{11} \cdot \frac{1}{(1 + bx)^{1/10}} \qquad 0 \leq x \leq 0,25 \qquad (48)$$

$$Y_2 = a_{21} \ (1 - x)^{1/2} \qquad 0,25 \leq x \leq 0,60 \qquad (49)$$

$$Y_3 = a_{31} \ (1 - x)^{3/4} \qquad 0,60 \leq x \leq 0,75 \qquad (50)$$

$$Y_4 = a_{41} \ (1 - x)^{5/6} \qquad 0,75 \leq x \leq 1,0 \qquad (51)$$

onde

$$y = \frac{d_x}{d_{0,5h}} \quad \text{série diamétrica relativa.}$$

$$x = \frac{h_x}{h} \quad \text{série relativa das alturas.}$$

O volume total da árvore é obtido pela soma das integrações parciais destas partes.

Este processo, como o da série absoluta, continua de forma é de grande utilidade para a avaliação parcial de volumes como na construção de tabelas de volumes mercantis. Um exemplo pode ser encontrado no trabalho de Peters (1971).

6. CONCLUSÕES

6.1. Como observado, todos os processos apresentam vantagens e desvantagens e podem ser escolhidos de acordo com o propósito e as condições estatísticas apresentadas pelos dados.

6.2. O processo III não parece oferecer precisão apropriada, dado os indivíduos oue participam da série na forma absoluta, resultarem em grande variabilidade, mesmo quando agrupados por classes de diâmetro, para homogeneizar as variações entre as árvores amostradas.

6.3. O processo IV promete satisfazer a maior gama de informações volumétricas das árvores amostradas num inventário. Neste processo pode-se obter o volume total e parciais das árvores amostradas. Este processo permite calcular qualquer volume parcial de tronco de uma árvore e consequentemente avaliar os volumes parciais classificados em diferentes classes de qualidade na floresta.

6.4. O processo IV apresenta uma vantagem adicional onde todas as árvores são comparáveis independentemente, de seus tamanhos e idade.

A série relativa contínua de forma pode ser sempre cumulativa e permite que apenas novos indivíduos amostrados sejam adicionalmente incorporados ao conjunto das árvores já anteriormente incluídas na série sem que uma outra função matemática precise ser pesquisada ou seja, sempre a mesma função anterior será mantida.

7. RESUMO

O presente trabalho visou reunir em uma única apresentação a formulação teórica dos quatro processos possíveis para o cálculo de volume de árvores individuais.

Foram incluídos em cada caso as citações mais importantes da literatura indicando-se a solução analítica de cada caso.

Concluiu-se no trabalho, que o processo de determinação volumétrica através de série relativa contínua de forma apresenta vantagens substanciais, principalmente quando o interesse se concentra em obter volumes parciais das árvores em geral ou para os fins de avaliação de volumes por classes de qualidade.

8. LITERATURA CITADA

1. ALTHERR, E. 1953. Vereinfachung des Hohendlschen Massenermittlungsverfahrens durch Verwendung des "eschten" Formaquocienten. Mitt d. Württ. Forst. Vers. Aus. Bd. 10 44p.
2. FUPEF, 1978. Inventários Florestal do Pinheiro no Sul do Brasil. Fundação de Pesquisas Florestais do Paraná. Curitiba. 327 p.
3. GIRARD, J.W. 193. Volume tables for Mississipi bottom land hard woods and southern pines. Journ. Forestry 31:34-41.
4. GROSENBAUCH, L.R. 1966. Tree form: definition, intepolation, extrapolation. Forestry Chron. 42: 444-457.
5. HOHENADL, W. 1924, Der Aufbau der Baumschäfte. Fw. Cbl.
6. JONSON, T. 1910. Taxatoriska Undersökningar orm Skogsträdens form I. Granens Stamform. Skogsvardsf. Tidskr. 8: 285-328.
7. KUNZE, M. 1891. Neue Methode zur raschen Berechnung der unechten. Schaftformzahlen der Fichte und Kiefer: Dresden S.30.
8. LOETSCH, F. et. allii, 1973. Forest Inventory. BLV. I Verlag, vol. II. München, Berlin, Wien 469 p.
9. MITSCHERLICH, G 1942. Untersuchungen über die Derbholzformzahl und neue Wege zu ihrer Ermittlung. M.F.F.
10. MUNRO, D.D. 1968. Methods for describing distribution of sound — wood of mature western hemlock trees Univ. of. Britisch Columbia Phd Thesis 188 p.
11. OGAYA, N. 1968. Kubirungsformeln und Bestandsmassenformeln. Dissertation Naturwissenschaftlich Matematischen Fakultät der Albert — Ludwigs — Universität. Zu Freiburg i Br. 85 p.
12. PETERS, R. 1971. Konstruktion eines Massentafemodells dargestellt am Beispiel der Baumart Araucaria araucana (Mol) C.Koch Dissetation. Forstwissenschaftlichen Fakultät der Albert Ludwig — Universität zu Freiburg i. Br. 95p.
13. POLANS CHÜTZ, J. 1961, Eine Neue Formbezw Kubierungsfunktion Ber. d. IUFRO Tagung Wien, Bd 2/25-11. 8/3.
14. POLANSCHÜTZ, J. 1965, Eine neue Methode der Formzahl-und Massenbestimmung stehender Stämme. Mitt. Forstl. Bundesversuchanst. Wien, 68. 186 p.
15. PREUβNER, K 1974, Eine neue Schaftkurvengleichung und ihre Anwendung. Wissenschaf. Zeit. der Tech. Univ. Dresden 23(1): 305-309.
16. PRODAN, M, 1944 Zuwachs — und Ertragsuntersuchugen im Plenterwald. Diss. Universität Freiburg 127 p.
17. PRODAN, M. Krenn, K. 1974 Die Bestimmung der echten Schaftholzformzahl aus dem echten Formquocienten Mitt d. Akad. deustsch. Fw. Bd 8 147 p.
18. PRODAN, M 1965 Holzmeβlehre. Sauerlanger's Verlag. Frankfurt am Main 644 p.
19. SIMONY, O. 1904 Über Formzahlen gleichungen und deren forstmathematische Verwertung, Wien III.
20. SCHIFFEL, A. 1899. Form und Inhalt der Fichte Wien Mitt, a.d. forst Versuchuswesen. Oesterreich Hf. 24.
21. SCHOEPFER, W 1966 Automatiesierung des Massen, Sorten — und Wertberechnung Stehender Waldbestände. Schriftenreihe Bad. — Würtl Forstl Vers. Bd. 21.
22. WUTT, H. 1961 Schaftkurven — Nährung der Integration-Polynome Cbt. d. gesante Forstwesen. H.1.