COMPARAÇAO DE EQUAÇÕES DE VOLUME PARA POVOAMENTO DE Acacia mearnsii DE WILL (ACACIA NEGRA) NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL

José Natalino Macedo Silva*
Paulo Renato Schneider**

SUMMARY

In this paper is explained the method developed by Kozak to be used in the comparison of regression equations.

The aplication of this method in the comparison of volume equations for Acacia mearnsii *Wild, has shown that a single equation can be used to represent the three populations studied.*

1. INTRODUÇAO

Um problema muito comum que se apresenta no estabelecimento de equações de regressão para observações provenientes de diversas populações, é saber se essas populações devem ser descritas por equações separadas, ou se todas, ou um grupo delas, pode ser representado por uma única equação.

No campo florestal, um bom exemplo pode ser citado no ajuste de equações volumétricas para diversas espécies, cujo número de equações pode ser reduzido pelo agrupamento dessas espécies. Outro exemplo consiste na obtenção de equações de volume para diversas regiões ou municípios para os quais há interesse em saber se todos, ou grupos deles, podem ser representados por uma única equação.

Segundo KOZAK[1], as equações de regressão podem diferir devido elas terem diferentes inclinações, ou seja, por não serem paralelas. Se existe o paralelismo, elas ainda podem diferir em nível. Isto quer dizer que seus interceptos são diferentes.

Esse mesmo autor desenvolveu um procedimento estatístico para testar o paralelismo e a coincidência de interceptos de equações de regressão provenientes de diferentes populações.

DECOURT[2], aplicando a metodologia proposta por Kozak, na cubagem de povoamentos equianos de **Picea abies** em cinco regiões diferentes da França, concluiu que uma única equação pode ser usada para a cubagem dos povoamentos nas cinco regiões estudadas.

O presente trabalho se constitui na aplicação do método de Kozak na comparação de equações de volume com casca para **Acacia mearnsii** de Wild, ajustadas para três plantios diferentes, situados no Estado do Rio Grande do Sul.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Os dados deste trabalho são oriundos de plantios de **Acacia mearnsii** de Wild de 3 Fazendas no Rio Grande do Sul, pertencentes a TANAC S/A: Fazenda Dona Bernarda, no município de Triunfo e Fazendas do Posto e do Treze, no município de General Câmara.

De cada população foram tomadas 250 observações de volume total com casca, totalizando 750 árvores, as quais foram derrubadas e cubadas através da fórmula de Smalian.

A pesquisa de modelos de equações de volume mostrou que a equação de SPURR, $\log V = b_0 + b_1 \log (d^2h)$, apresentou o melhor ajuste para as três populações estudadas.

A seguir é apresentada uma breve descrição do método de Kozak para a comparação de equações de regressão.

O problema consiste em testar duas hipóteses:

1. se as inclinações são paralelas;
2. se os interceptos são iguais ou coincidem.

A equação acima pode ser representada pelo modelo:

* Pesquisador da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária.
** Professor de Ordenamento Florestal da Universidade Federal de Santa Maria.

$Y = b_0 + b_1 X_1$, onde

$Y = \log V$

$X_1 = \log (d^2h)$

Para as três populações estudadas, são os seguintes os modelos lineares aditivos:

$$Y_{1i} = b_{10} + b_{11} x_{11i} + \epsilon_{1i} \qquad i = 1, 2, \ldots n_1 \qquad (1)$$

$$Y_{2j} = b_{20} + b_{21} x_{21j} + \epsilon_{2j} \qquad j = 1, 2, \ldots n_2 \qquad (2)$$

$$Y_{3k} = b_{30} + b_{31} x_{31k} + \epsilon_{3k} \qquad k = 1, 2, \ldots n_3 \qquad (3)$$

onde Y_{pi} e X_{pli} indicam a i — ésima observação de Y_1 da p — ésima população.

As perguntas que surgem são se estas três equações podem ser combinadas em uma só, ou se as equações 1 e 2; 1 e 3; 2 e 3 podem ser combinadas. Isto significa estabelecer as seguintes hipóteses nulas:

$$Ho' : b_{11} = b_{21} = b_{31} = b_1 \text{ e}$$

$$Ho'' : b_{10} = b_{20} = b_{30}, \text{ dado que Ho foi aceita.}$$

Em outras palavras Ho' testa se as três equações de regressão descrevem superfícies paralelas, e Ho'' testa a hipótese se estas superfícies coincidem, visto que são paralelas.

Para realizar estes testes, tomemos as equações normais para as equações 1, 2 e 3. Os coeficientes de regressão são dados, pela soma de quadrados e produtos corrigidos, por:

$$\Sigma x^2_{11} b_{11} = \Sigma x_{11} y_1 \qquad (4)$$

$$\Sigma x^2_{21} b_{21} = \Sigma x_{21} y_2 \qquad (5)$$

$$\Sigma x^2_{31} b_{31} = \Sigma x_{31} y_3 \qquad (6)$$

onde, para cada população

$$\Sigma x^2_1 = X^2_1 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n}$$

$$\Sigma x_1 y = \Sigma X_1 Y - \frac{\Sigma X_1 . \Sigma y}{n}$$

Uma vez calculados os coeficientes de regressão das equações 4, 5 e 6, a soma de quadrados dos resíduos para cada equação é dada por:

$$SQres_1 = \Sigma y_1^2 - b_{11} \Sigma x_{11} y_1 \quad \text{com } n_1 - m \ 1 \text{ gl}$$

$$SQres_2 = \Sigma y_2^2 - b_{21} \Sigma x_{21} y_2 \quad \text{com } n_2 - m \ 1 \text{ gl}$$

$$SQres_3 = \Sigma y_3^2 - b_{31} \Sigma x_{31} y_3 \quad \text{com } n_3 - m \ 1 \text{ gl}$$

onde

$$\Sigma y_p^2 = \Sigma y_p^2 \frac{(\Sigma y\ )^2}{n_p}$$

$p = 1, 2, 3$ (nº de populações).

O próximo passo consiste em ajustar os dados a um modelo restrito, com a restrição que:

$$b_{11} = b_{21} = b_{31} = b_1$$

Esta igualdade resulta em três superfícies de regressão paralelas. A equação de b_1 é dada pela soma dos primeiros e segundos membros das equações 4, 5 e 6.

$$\Sigma x_{11}^2 b_1 + \Sigma x_{21}^2 b_1 + \Sigma x_{31}^2 b_1 = \Sigma x_{11} y_1 + \Sigma x_{21} y_2 + \Sigma x_{31} y_3$$

$$b_1 = \frac{\Sigma x_{11} y_1 + \Sigma x_{21} y_2 + \Sigma x_{31} y_3}{\Sigma x_{11}^2 + \Sigma x_{21}^2 + \Sigma x_{31}^2} \qquad (7)$$

Substituindo-se o valor b_1 nas equações 1, 2 e 3, temos:

$$Y_{1i} = b'_{10} + b_1 x_{11i} + \epsilon'_{1i} \qquad i = 1, 2, \ldots n_1 \qquad (8)$$

$$Y_{2j} = b'_{20} + b_1 X_{21j} + \epsilon'_{2j} \qquad j = 1, 2, \ldots n_2 \qquad (9)$$

$$Y_{3k} = b'_{30} + b_1 X_{31k} + \epsilon'_{3k} \qquad k = 1, 2, \ldots n_3 \qquad (10)$$

onde:

$$b'_{0p} = \overline{Y}_p - b_1 \overline{X}_{p1}$$

$\overline{Y}_p$ = média da variável dependente da p — ésima população

$\overline{X}_{p1}$ = média da variável independente da p — ésima população.

Até aqui temos dois tipos de somas de quadrados e resíduos:

a) Resíduos para as equações 1, 2e 3 ou resíduos para os modelos sem restrições.

$$SQres = \sum_{j=1}^{p} SQres_j \text{ com } \sum_{j=1}^{p} nj - pm - p \text{ gl}$$

Neste caso, $SQres = SQres_1 + SQres_2 + SQres_3$ com $n_1 + n_2 + n_3 - 6$ graus de liberdade.

b) Resíduos para as equações 8, 9 e 10, ou resíduos para os modelos com restrições.

$$SQ'res = \sum_{j=1}^{p} y_j^2 - b_1 \sum_{j=1}^{p} x_{1j} y_j \text{, com}$$

$\sum_{j=1}^{p} nj - m - p$ graus de liberdade

Neste caso, $n_1 + n_2 + n_3 - 4$ gl

Os resultados até agora podem ser sumarizados no quadro de análise da Variância a seguir:

QUADRO 1 — Análise da Variância para o Teste de Paralelismo.

Origem da Variação	GL	SQ	MQ	F
Resíduos para modelos com mesma inclinação	$\sum_{j=1}^{p} nj - m - p$	SQ'_{RES}		
Resíduos para modelos sem restrição	$\sum_{j=1}^{p} nj - pm - p$	SQ_{RES}	MQ_{RES}	
Diferença	$m(p-1)$	$SQ_{DIF} = SQ'_{RES} - SQ_{RES}$	MQ_{DIF}	$\frac{MQ_{DIF}}{MQ_{RES}}$

Um resultado significativo de F nos leva a rejeitar a hipótese H'_o, ou seja, que as superfícies de regressão são paralelas. Neste caso não tem sentido testar se os interceptos são iguais (H''_o), uma vez que as superfícies de regressão apresentam diferentes inclinações. Existem, no entanto, procedimentos para detectar quais equações são diferentes e quais equações podem ser consideradas iguais.

Um valor de F não significativo na tabela 1, permite testar a hipótese H''_o, uma vez que H''_o não foi rejeitada:

$$H''_o: b_{10} = b_{20} = b_{30} = b_0$$

Esta hipótese significa ajustar superfícies de regressão paralelas com interceptos iguais. Em outras palavras, significa estabelecer uma equação de regressão combinada para todos os grupos testados. Isto é conseguido ajustando uma única equação para todos os dados, como se eles se originassem de uma só população.

No exemplo apresentado, a equação normal será:

$$\sum_{i=1}^{n} x^2_{1i}\, b'_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}\, y_i \text{, onde} \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^2_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x^2_{1i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\right)^2}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\, y_i = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}\, y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

Neste caso, o coeficiente b' é assim escrito para mostrar que ele é diferente do calculado pela equação 7.

O intercepto comum é dado por:

$b_0 = \overline{Y} - b'_1\overline{X}_1$, onde

$\overline{Y}$ = média da variável dependente para todas as observações.

$\overline{X}$ = média da variável independente para todas as observações.

A equação de regressão ficará então:

$$y_i = b_0 + b'_1 X_{1i} + \ddot{\epsilon}_i \qquad i = 1, 2, \ldots n \qquad (12)$$

A soma dos quadrados do resíduo para a equação 12 é dada por:

$SQ''_{RES} = \Sigma Y^2 - b'_1 \; \Sigma x_1 Y$, com

$\sum_{j=1}^{n} nj\ m - 1$ graus de liberdade.

Neste caso, $n_1 + n_2 + n_3 - 2$ gl.

Os resultados podem ser resumidos no quadro de Análise de Variância como segue:

QUADRO 2 — Análise de Variância para o teste de coincidência.

Origem da Variação	GL	SQ	MQ	F
Resíduo para o modelo com inclinações e interceptos comuns	$\sum_{j=1}^{n} nj - m - 1$	SQ''_{RES}		
Resíduo para modelos com mesma inclinação	$\sum_{j=1}^{n} nj - m - p$	SQ'_{RES}	MQ'_{RES}	
Diferença	$p - 1$	$SQ'_{DIF} = SQ''_{RES} - SQ'_{RES}$	MQ'_{DIF}	$\dfrac{MQ'_{DIF}}{MQ'_{RES}}$

Se o teste F resulta significativo, rejeita-se a hipótese Ho, ou seja, os interceptos não podem ser considerados iguais. Sendo o teste não significativo, conclui-se que as superfícies de regressão são paralelas e coincidentes, podendo, portanto, serem substituídas por uma única equação.

No caso de um resultado significativo de F no quadro 2, KOZAK[1] cita dois procedimentos para detectar as diferenças. O primeiro deles consiste em usar o teste de comparação múltipla de Duncan, desenvolvido para comparar os interceptos de p equações. Este teste, contudo, só pode ser aplicado em regressão linear simples, com apenas uma variável independente. O segundo procedimento consiste em usar a técnica de análise da variância do quadro 2 para sub-grupos de equações de regressão, até que todas as possíveis diferenças possam ser detectadas. Se por exemplo temos 3 equações, A, B e C, podemos tentar A $\times$ B, A $\times$ C e B $\times$ C, qu elevará à resposta completa. Esta mesma técnica pode ser empregada no caso de um resultado significativo de F no teste de paralelismo.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As seguintes equações foram obtidas para as três populações estudadas:

Fazenda dona Bernarda: $\log V = -4{,}25021718 + 0{,}96356127 \log (D^2H)$

Fazenda do Posto: $\log V = -4{,}17239664 + 0{,}94029364 \log (D^2H)$

Fazenda do Treze: $\log V = -4{,}17567367 + 0{,}94256634 \log (D^2H)$

Tendo-se as três equações, há interesse em saber se estas podem ser combinadas em um só, ou se diferentes equações devem ser empregadas para cada população.

O primeiro passo consiste em verificar se as três equações descrevem superfícies de regressão paralelas, o que é feito testando-se a hipótese Ho, cujos resultados são sumarizados no quadro de Análise da Variância abaixo:

QUADRO 3 — Análise da Variância: teste de paralelismo.

Origem da Variação	GL	SQ	MQ	F
Resíduo para modelos com inclinações comuns	746	0,3054		
Resíduo para modelos sem restrições	744	0,3029	0,0004	3,25 NS
Diferença	2	0,0025	0,0014	

Uma vez aceita a hipótese Ho, conclui-se que as três equações descrevem superfícies de regressão paralelas.

O segundo passo consiste em verificar se, sendo paralelas, as equações apresentam iguais interceptos. Isto significa testar a hipótese Ho, cujos resultados são resumidos no quadro 4.

QUADRO 4 — Análise de Variância: teste de coincidência.

Origem da Variação	GL	SQ	MQ	F
Resíduo para modelos com inclinações e interceptos comuns	748	0,3081		
Resíduo para modelos com inclinações comuns	746	0,3054	0,0004	3,50 NS
	2	0,0027	0,0014	

O resultado de F não significativo nos leva a concluir que as equações são, tão somente paralelas, como coincidentes em seus interceptos, podendo, portanto, ser representadas por uma única equação.

A combinação das 750 observações oriundas das três populações estudadas, resultou na equação:

$$\log V = 4{,}200151008 + 0{,}949274200 \log (D^2H)$$

4. CONCLUSÕES

O método de Kozak para comparação de equações de regressão se constitui em um procedimento simples e de grande aplicabilidade no campo florestal.

No presente trabalho, os testes de paralelismo e coincidência resultaram não significativos na comparação de equações volumétricas para as três populações estudadas, podendo, neste caso, ser representadas por uma única equação, resultante da combinação de todas as observações.

5. RESUMO

Neste trabalho apresenta-se o método desenvolvido por Kozak para a comparação de equações de regressão.

A aplicação do método na comparação de equações de volume para **Acacia mearnsii** de **Wild** (Acacia negra), mostrou que uma única equação pode ser utilizada para representar as três populações estudadas.

6. LITERATURA CITADA

1. KOZAK, A. A simple method to test parallelism and coincidence for curvilinear regressions. In: IUFRO CONFERENCE ADVISORY GROUP OF FOREST STATICIANS, 3., Jouy-en-Josas, 1972. Paris, INRA, 1972. p. 133-145.

2. DECOURT, N. Comparaison des équations de régression. Application au cubage des peuplements d'épicéa commum. **Ann.Sci. Forest.**, 28(1): 51-58, 1971.