TRANSFORMAÇÕES PARA AJUSTE DE CURVAS DO TIPO SIGMÓIDE

Altair Pereira Barusso *
José Carlos Ribeiro **

SUMMARY

This paper outlines an adaptation to the metric sistem of the curve patterns developed by Chester E. Jensen and Jack W. Homeyer "MATCHACURVE-1 FOR ALGEBRAIC TRANSFORMS TO DESCRIBE SIGMOID OR-BELL-SHAPED CURVES" in a form suitable for the Hewlett-Packard 9830 A Computer, to generate curve patterns.

The method is explained by means of an example using facts relating Height & Age of ARAUCARIA ANGUSTIFOLIA (BERT) O. KTZE, colleted in the region of the Segundo Planalto do Paraná near Vila Velha.

1. APRESENTAÇÃO

As equações de curvas do tipo Sigmóide (ou Sino) como as relações de crescimento biológico e outras podem ser determinadas com relativa facilidade e grande precisão com o uso de modelos padrões.

Sendo encontrada entre as curvas padrões, uma que melhor se ajuste ao gráfico proposto pela relação e da qual se quer determinar a equação matemática, a forma algébrica específica para o padrão pode ser ajustada aos dados originais pelo método dos mínimos quadrados.

As formas algébricas utilizadas na função são todas razões de funções exponenciais.

2. INTRODUÇÃO

Ao se iniciar um ajuste bi-dimensional de uma dada equação é de todo necessário que antes de tudo se faça em papel quadriculado uma distribuição dos pontos (das observações) e em seguida, a "mão livre", se esboce a forma provável da curva que melhor se adapte aquela distribuição.

Após este procedimento, se se tem uma curva da forma sigmóide (ou sino) pode-se seguir os passos que iremos explicar para a determinação de índices que serão dados para a linearização da equação e posterior aplicação do método dos mínimos quadrados.

Os passos seguintes têm basicamente a finalidade de transformar a curva original para se obter uma curva que será comparada a uma das curvas padrões apresentadas nas tabelas que seguem anexo. A seguir executa-se com os índices encontrados uma regressão pelo método dos mínimos quadrados, obtendo-se finalmente uma equação com precisão aceitável.

3. MÉTODO

Um exemplo:

Para uma compreensão prática do procedimento a ser seguido na utilização do presente método, vamos ajustar uma curva sigmóide com os dados da tabela 1.

É bom que se frise que todas as curvas de forma sigmóide podem ser ajustadas pelo presente procedimento.

IDADE	(H) ALTURA (M)
1	0.25
2.	0.90
3	2.10
4	3.05
5	4.00
6	5.15
7	6.15
8	8.25
9	9.25
10	11.25
11	12.10
12	13.25
13	13.70
14	14.30
15	14.75
16	14.80
17	14.90
18	15.10
19	15.20
20	15.30

TABELA 1:

Dados provenientes de análise de tronco de 1 árvore de ARAUCÁRIA ANGUSTIFOLIA da região do Segundo Planalto do Paraná.

* Engº Florestal Prof. do Curso de Engenharia Florestal, U.F.Pr.
** Engº Florestal, Prof. do Curso de Engenharia Florestal, U.F.V.

Com os dados da tabela 1 constrói-se uma distribuição conforme gráfico 1 e manualmente ajusta-se a curva até encontrar-se o ponto de máximo (Xp Yp).

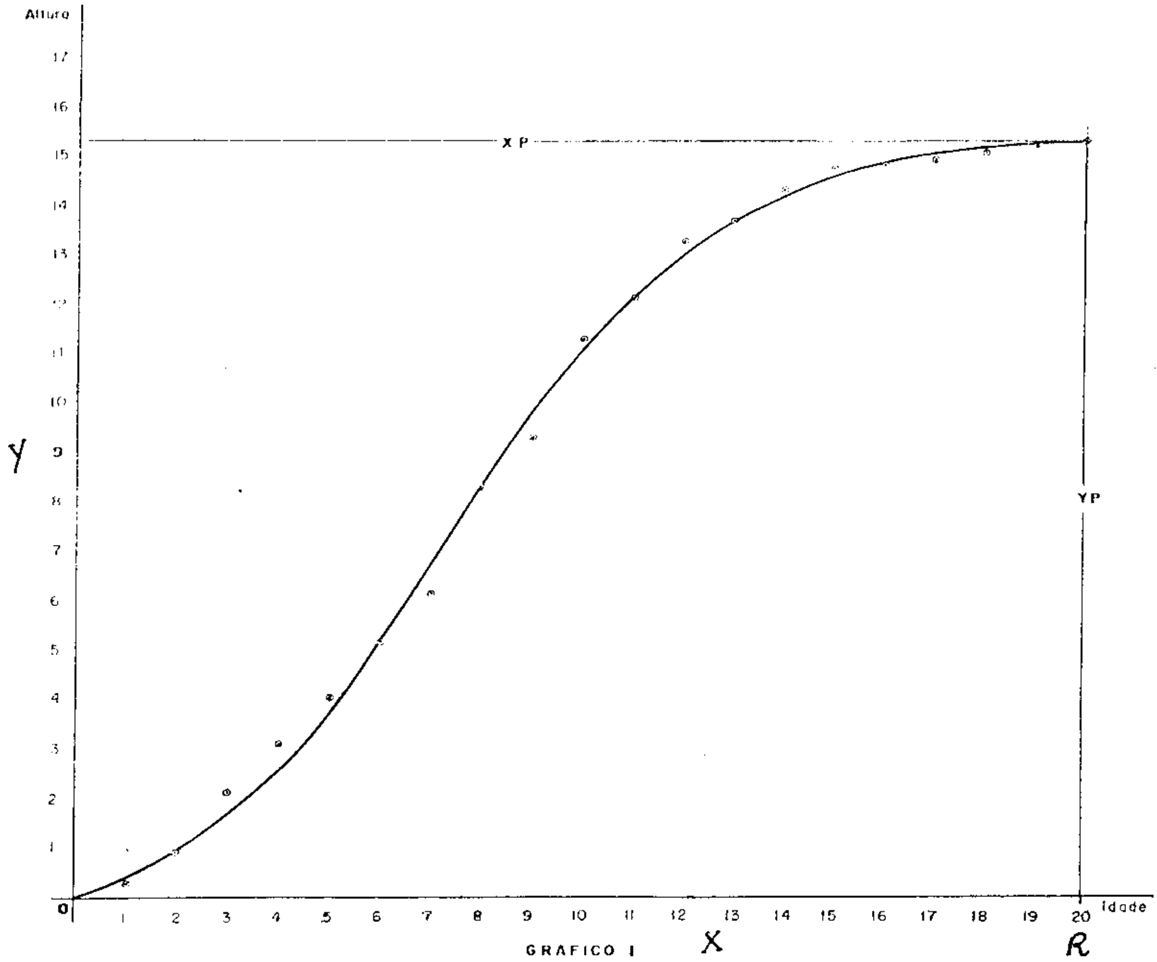


GRÁFICO 1:

Altura em função da idade em ARAUCÁRIA ANGUSTIFOLIA na região de Ponta Grossa (Segundo Planalto do Paraná).

Passamos a trabalhar agora, apenas com a porção sigmóide da curva entre 0 e R ($0 \leq X \leq R$).

Dividimos a porção $\overline{OR}$ em 10 partes iguais e determinamos os correspondentes valores de Y por medição gráfica, (daí a necessidade deste gráfico ser feito em papel melimetrado ou quadriculado, com o maior cuidado possível).

Com os dados de X e Y compõe-se o quadro abaixo: Quadro 1.

X	0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0	20.0
Y	0	1.0	2.5	5.15	8.25	11.0	13.0	14.2	14.9	15.20	15.30

QUADRO 1

Em seguida para obtermos a mesma escala das curvas padrões divide-se todos os valores de **X** por **Xp** e **Y** por **Yp** obtendo o quadro 2.

X/XP	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
Y/YP	0	0.06	0.16	0.34	0.54	0.72	0.85	0.93	0.97	0.99	1.00

QUADRO 2

Com estes dados construimos o gráfico 2 em papel (milimetrado) de preferência em papel transparente de forma que para eixo **X** tenhamos **XP** = 15 cm logo 1,5 cm = 0,1 do valor de **X/XP**, e para Y tenha-se 10 cm logo cada 1.0 cm = 0.1 do valor de **Y/YP**, ficando assim o gráfico na mesma escala das curvas padrões.

Com estes dados construimos o gráfico 2 em papel (milimetrado) de preferência em papel transparente de forma que para eixo X tenhamos XP = 15 cm logo 1,5 cm = 0,1 do valor de X/XP, e para Y tenha-se 10 cm logo cada 1.0 cm = 0.1 do valor de Y/YP, ficando assim o gráfico na mesma escala das curvas padrões.

Usando-se esta curva (conf. gráf. 2) como uma "transparência", coloca-se sobre as curvas padrões de N = 1.0 a 10.0 que se encontram em anexo a este trabalho. Encontra-se desta forma entre as curvas padrões a que melhor se ajusta a curva transformada. Caso não haja uma superposição ideal, pode-se fazer interpolação, achando-se desta forma o valor de "**Z**" intermediário e, da mesma forma pode-se encontrar o valor de "**N**" interpolado.

Deve-se ter o máximo cuidado na concidência dos eixos **X** e **Y** da curva padrão com o que se quer comparar evitando desta forma resultados decepcionantes.

Para o nosso exemplo a coincidência foi com o padrão N = 3. e Z = 0.3.

As variações entre os gráficos é atribuída ao expoente **N** e dentro de um gráfico ao valor da relação **Z** e para um mesmo **Z** nos valores de inclinações **X**.

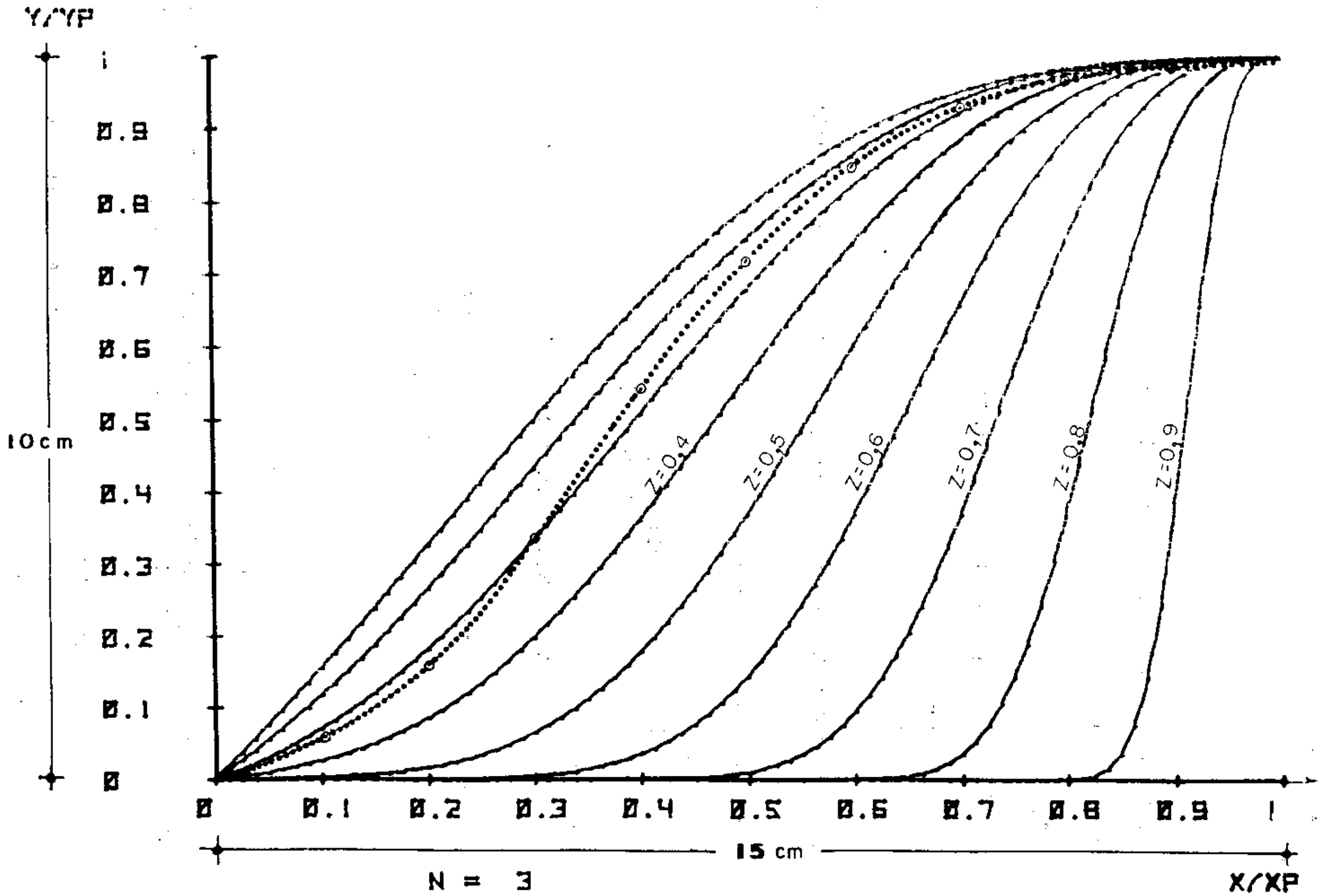


GRÁFICO 2

N = 3,2
Z = 0,3

Agora nossa variável dependente é uma transformada pela divisão **Y** por **Yp** e tem-se a equação genérica.

$$Y/Yp = \frac{e^{-A} - e^{-B}}{1 - e^{-B}}$$

onde: e = base dos logarítimos neperianos = 2.718281

$$A = \left| \frac{(X/XP) - 1}{X1/XP - 1} \right|^{N}$$

B = A para X = 0; logo X/XP = 0 e então

$$B = \left| \frac{-1}{X1/XP - 1} \right|^{N}$$

X1/XP = Z o valor das diferentes curvas dentro de um mesmo gráfico (um mesmo N).

Para o presente exemplo, temos:

$$A = \left| \frac{X/Xmax - 1}{Z - 1} \right|^{N} \qquad \text{onde} \begin{cases} Z = 0{,}3 \\ Xmax = 20 \\ N = 3 \end{cases}$$

$$A = \left| \frac{X/20 - 1}{0.3 - 1} \right|^{3}$$ e a equação total será na forma.

$$Y/YP = \frac{e^{-\left| \frac{X/20 - 1}{0.7} \right|^{3}} - e^{-\left| \frac{-1}{0.7} \right|^{3}}}{1 - e^{-\left| \frac{-1}{0.7} \right|^{3}}}$$

"Se **B** fosse maior que 10, poderiam ser desprezados os segundos membros (subtraendos), do numerador e do denominador, ficando a equação na forma reduzida:

$$Y/YP = e^{-\left| \frac{X/Xmax - 1}{Z - 1} \right|^{N}}$$ ", mas este não é o nosso caso.

Como **Y/YP** é somente uma mudança escalar de **Y**, pode-se substituir **Y/YP** por **Y** obtendo-se o modelo linear:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 * \frac{e^{-\left|\frac{X/20 \;\; -1}{0,3 \;\; -1}\right|^3} - e^{-\left|\frac{-1}{0,3 \;\; -1}\right|^3}}{1 - e^{-\left|\frac{-1}{0.7}\right|^3}}$$

Chamando-se o multiplicador de β_1 de X_1 teremos o modelo linear simples.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

e as estimativas de β_0 e β_1, são respectivamente $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, que poderão encontradas através de regressão linear. Pelo computador HP 9830-A encontrou-se

$$\hat{\beta}_0 = 0.135311962$$

$$\hat{\beta}_1 = 15.33326353$$

coeficiente de correlação $R = 0.99822$

erro padrão de estimativa $Sxy = 0.3334098$

Por uma análise visual no gráfico 2, vemos que a curva transformada não se ajusta exatamente a $N = 3$ e $Z = 0.3$. Daí por tentativa, estipulamos variações para **N** e **Z** e, encontramos uma solução melhor com $N = 3.2$ e $Z = 0.3$ com isto resolvendo a regressão como no caso de $N = 3$ e $Z = 0.3$, encontrou-se para $\hat{\beta}_0 = 0.079603371$; $\hat{\beta}_1 = 15.2274674$, correlação múltipla $= 0.998946$ e erro padrão de estimativa $= 0.256920$. Houve com isto ganho na correlação e uma diminuição no erro padrão. Esta equação se encontra juntamente com os dados originais plotados no gráfico 3.

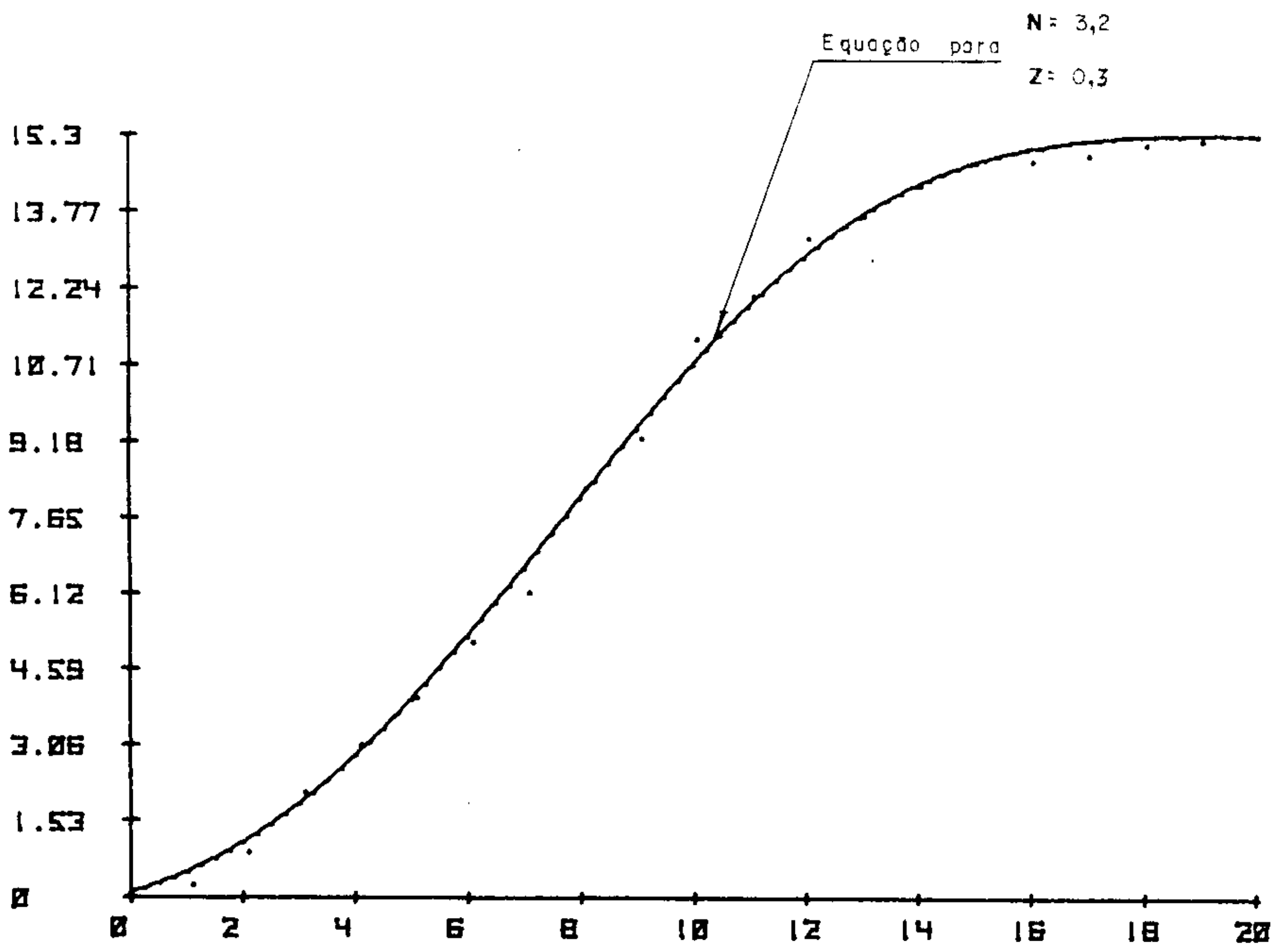

Equação para
N = 3,2
Z = 0,3
15.3
13.77
12.24
10.71
9.18
7.65
6.12
4.59
3.06
1.53
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

GRÁFICO 3

No gráfico 4, apresentamos a mesma equação reduzida para escala das curvas padrões e, que junto com estas, mostra o seu ajuste em relação ao modelo padrão inicialmente escolhido.

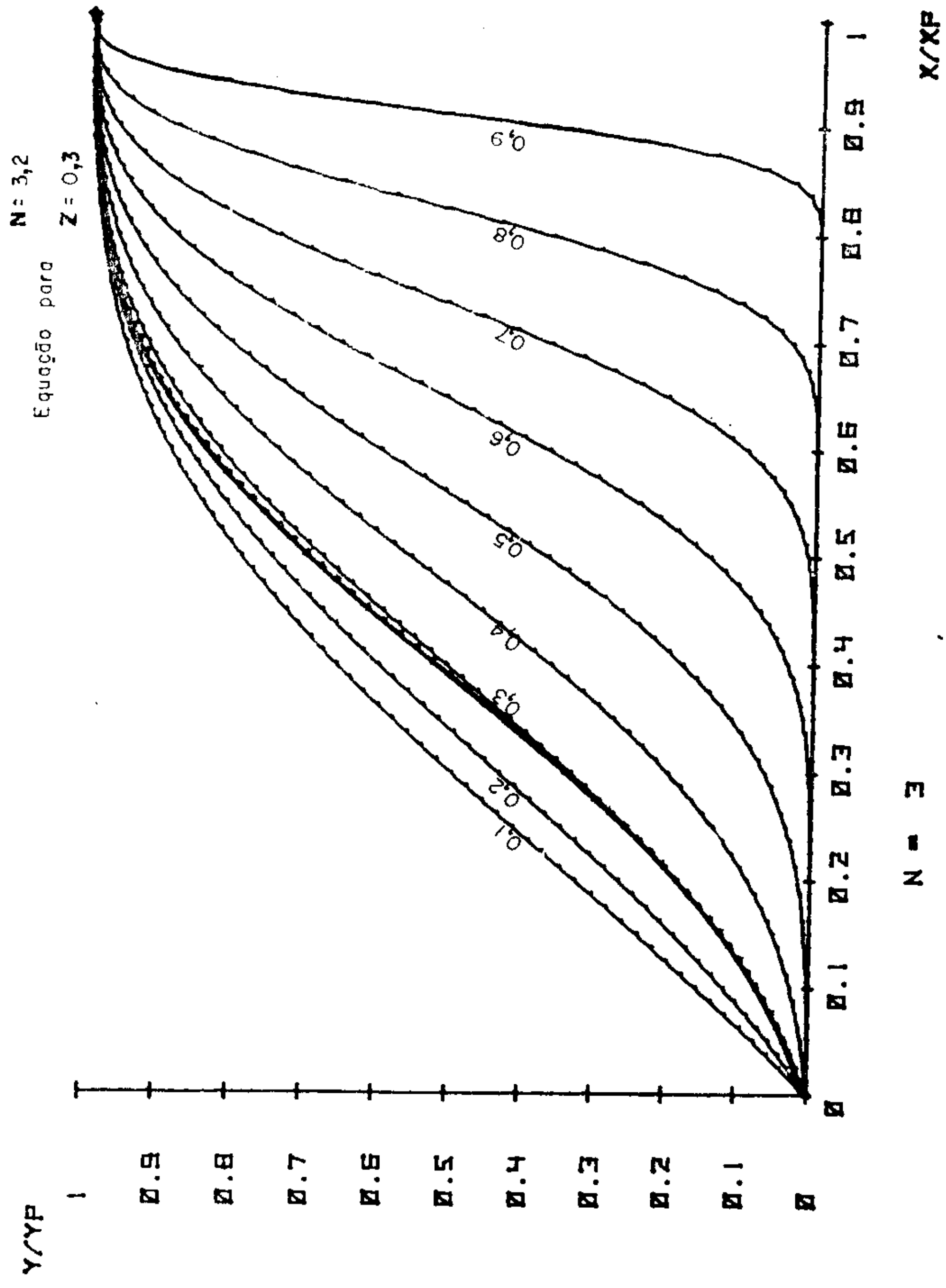


GRÁFICO 4

4. OUTROS USOS POSSÍVEIS DAS CURVAS SIGMÓIDES

Há outros usos possíveis com as curvas padrões apresentadas seguindo os mesmos procedimentos, bastando para tanto, pequenas considerações iniciais.

Basicamente são 4 estes possíveis usos de acordo com Jensen e Homeyer.

.4.1. Intercessão com Y fora de 0

De acordo com os gráficos abaixo são duas as situações possíveis neste caso:

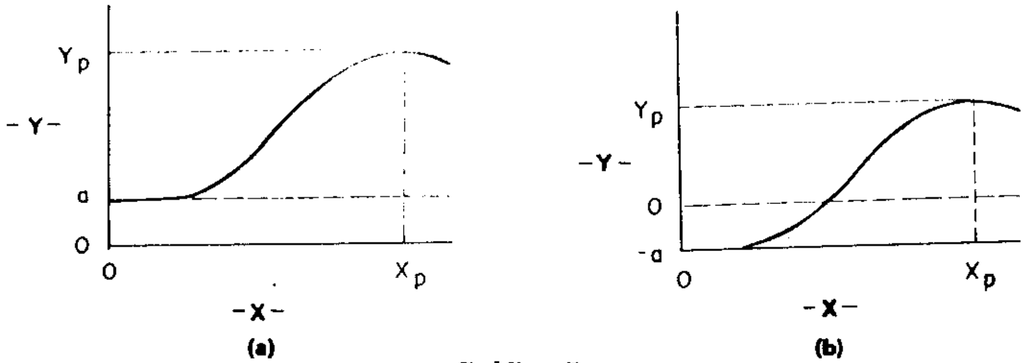


Gráfico 5:

A curva nunca desce abaixo de **a** seja ele positivo como em (a) ou negativo (b). Para se aplicar as curvas usa-se substituir Y por (Y-a). Como exemplo, se no nosso caso a intercessão fosse em + 20, os dados seriam como no quadro 3:

X	20	21.0	22.5	25.15	28.25	31.0	33.0	34.2	34.9	35.2	35.3
Y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

QUADRO 3:

Substituindo Y por (Y—20) teremos o quadro 1, visto anteriormente. Segue-se o já exposto até aqui para determinação de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, claro está que após encontrado o $\hat{\beta}_0$, tem que ser relocado para + 20.

Para o caso (b) adiciona-se **a** ao valor de Y.

4.2 Para Y > 0, X assume valor = 0

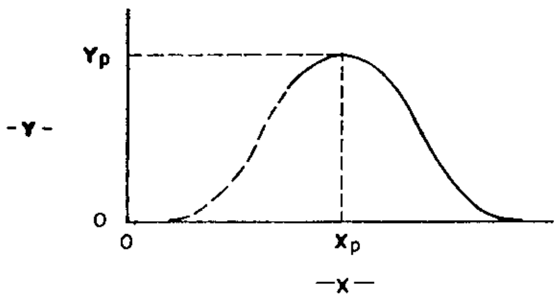


Gráfico 6:

Substitui-se X por (X—Xr) no ajuste dos mínimos quadrados e, segue-se o procedimento já exposto no exemplo.

4.3 Desejando-se a metade direita da curva

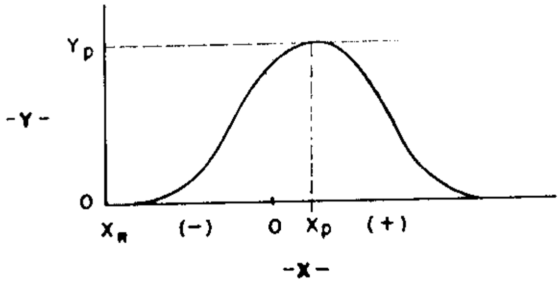


Gráfico 7:

Desenhar a parte normal e, em seguida, fazendo simetria no ponto máximo traçar a parte esquerda e através desta, desenvolver como no exemplo dado.

4.4 Sigmóide incompletamente especificada

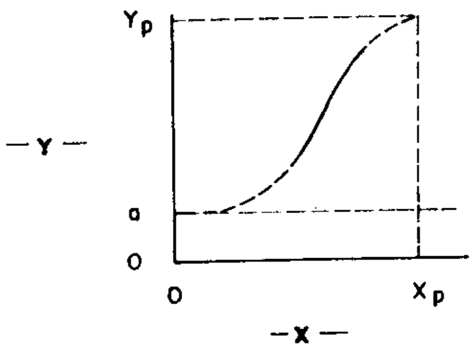


Gráfico 8:

Se **Xp**, **Yp**, e a intercessão a não são especificados estes, têm que ser estimados e daí em diante as curvas são aplicadas como anteriormente.

Obs.: Como a não pode muitas vezes ser bem estimado, assim como o **Xp** aconselha-se fazer várias tentativas até que a correlação múltipla seja a melhor possível.

4.5 Curva em sino invertida (ou porção desta)

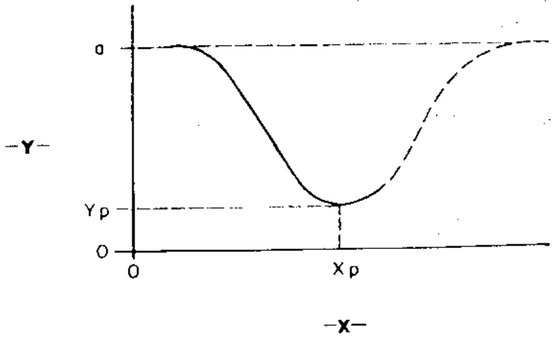


Gráfico 9:

Aplicar uma rotação em torno do eixo paralelo a **X** e que intercepta Y em **a**. Aplicar o procedimento inicial ajustando a transformação de **X** encontrada pelo antigo valor de Y. Finalmente $\hat{\beta}_0$ deve ser ajustado para **a** e $\hat{\beta}_1$ deverá assumir o sinal (-1).

5. CÁLCULO À MÁQUINA

Não há necessidade de computadores para se obter os valores de B_0, β_1, R e Sxy da regressão para o caso de um número reduzido de observações sobre **Y** e **X**.

O valor de e^{-A} ou e^{-B} só devem ser calculados para $|A|$ ou $|B| < 10$, uma vez que os valores acima desta condição se tornam desprezíveis ($e^{-10} = 0.00004539$).

Para o cálculo das potências de **e** aconselha-se o uso de tabelas ou cálculo logarítmico.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\,\Sigma X_1 Y - \Sigma X_1 \Sigma Y}{n\,\Sigma X_1^{\,2} - (\Sigma X_1)^2} = \frac{\Sigma(X-\overline{X})\ (Y-\overline{Y})}{\Sigma(X-\overline{X})^2}$$

O valor de X_1 é o valor transformado de X, como já foi visto no exemplo dado.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma Y}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\Sigma X_1}{n} \quad \text{ou} \quad \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1$$

$$R = \frac{\Sigma\left\{(X_1-\overline{X}_1)\quad(Y-\overline{Y})\right\}}{\sqrt{\Sigma(X_1-\overline{X}_1)^2 \;*\; \Sigma(Y-\overline{Y})^2}}$$

$$Sxy = \sqrt{\Sigma(Y-\hat{Y})^2/(N-1)}$$

6. SOBRE A COMPUTAÇÃO E O PROGRAMA PARA TRAÇADO DAS CURVAS

O computador Hawlett Packard apresenta a condição de trabalhar no máximo com 9.9999 * 10^{-99}. Isto obriga-nos a fazer no programa uma série de testes com os componentes de **e** (ou seja B e A). Quando estes assumem valores superiores a 277 o computador acusa a condição de ter ultrapassado sua capacidade de cálculo, daí os testes "IFs" que desviam o programa.

A mesma situação tem que ser observada no programa para cômputo da Regressão.

No traçado das curvas, o eixo de **X** foi dividido em 10 partes, tendo o comprimento total de 15 cm devido às limitações de impressão, logo cada divisão tem 1.5 cm. Estas foram divididas em 8 partes para deslocamento do Plotter logo havendo variações de 1,5/8 = 0,187 = 2m, isto não causa problema na forma da curva permitindo ao mesmo tempo que o "plotter" tenha um deslocamento relativamente rápido.

7. RESUMO

O presente trabalho expõe uma adaptação ao sistema métrico das curvas padrões de Chester E. Jensen e Jack W. Homeyer em "MATCHACURVE - 1" para transformação algébrica na descrição de curvas sigmóides ou sino, em uma forma adequada para o Computador HP modelo 9830A. O método é exposto através de um exemplo usando a relação altura/idade de **Araucaria angustifolia** (Bert) O. KTZE, coletada na região do Segundo Planalto do Paraná, próximo à Vila Velha.

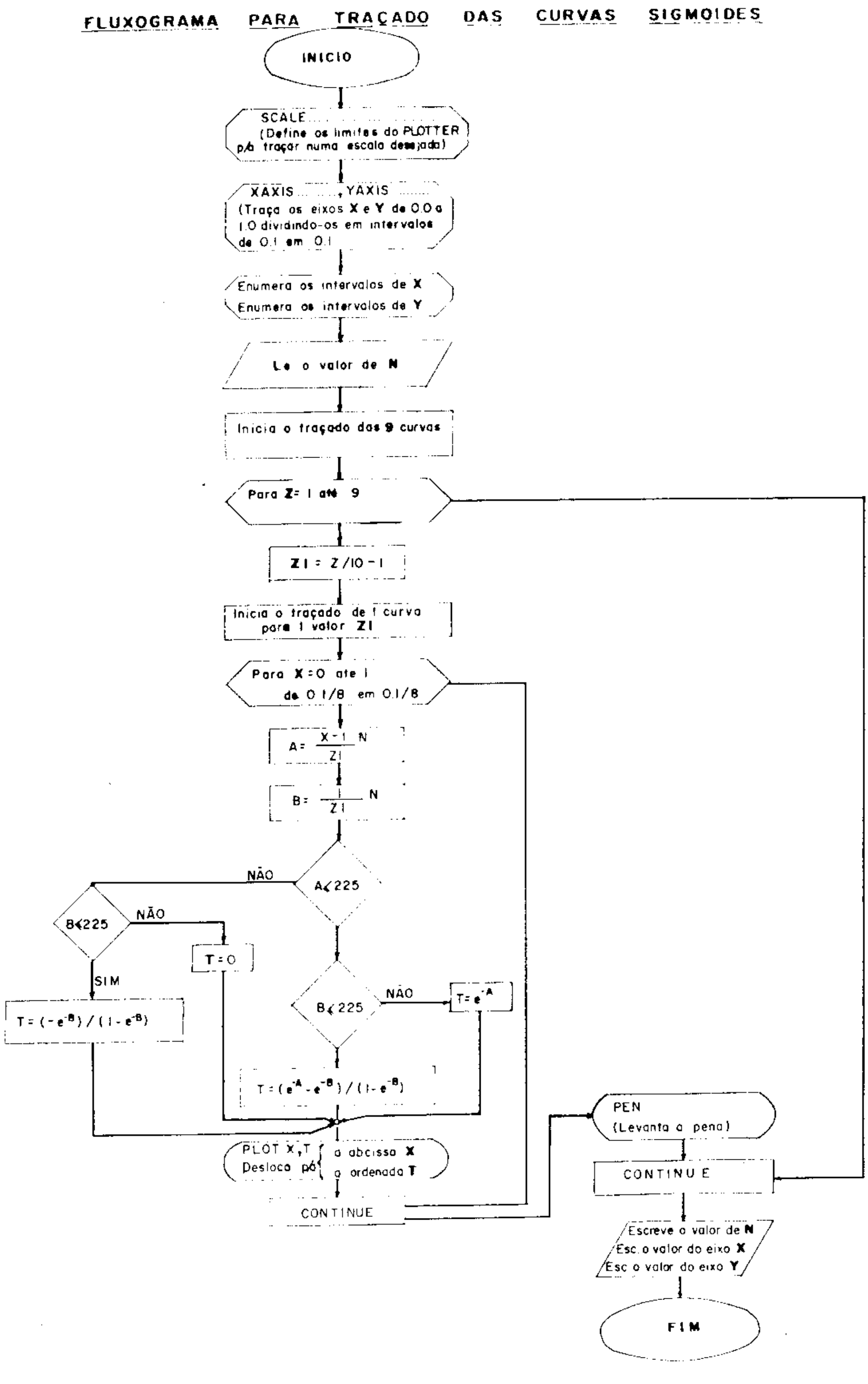
8. LITERATURA CITADA

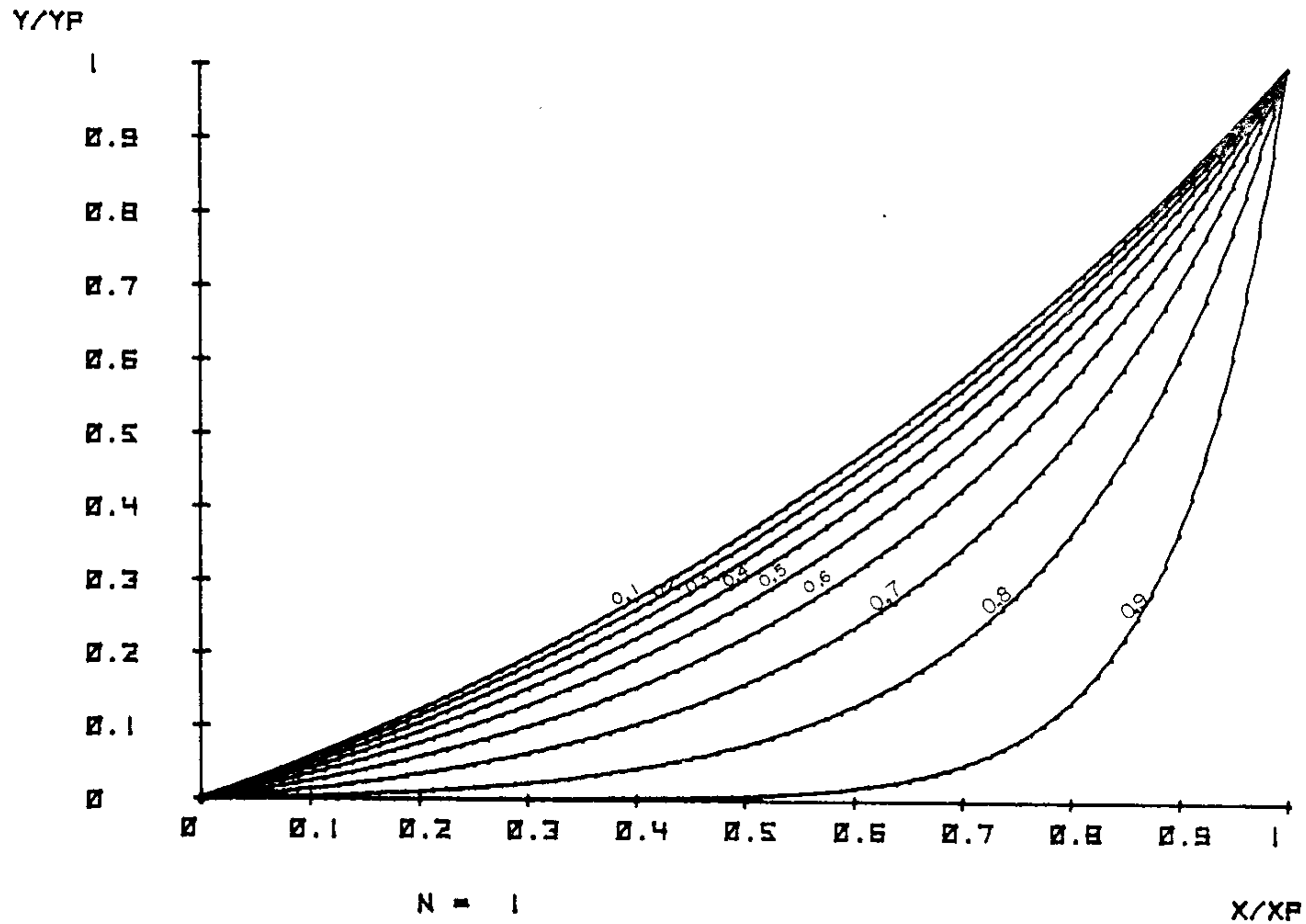
1. HEWLETT-PACKARD COMPANY. **Operating and programming manual.** Hewlett-Packard Calculator Products Division, 1973.

2. JENSEN, C. & HOMEYER, J.W. **Matchacurve-1 for algebraic tranforms to describe sigmoid--or-bell-chaped curves. Ogden,** Intermountain Forest and Range Experiment Station, 1970. 22 p.

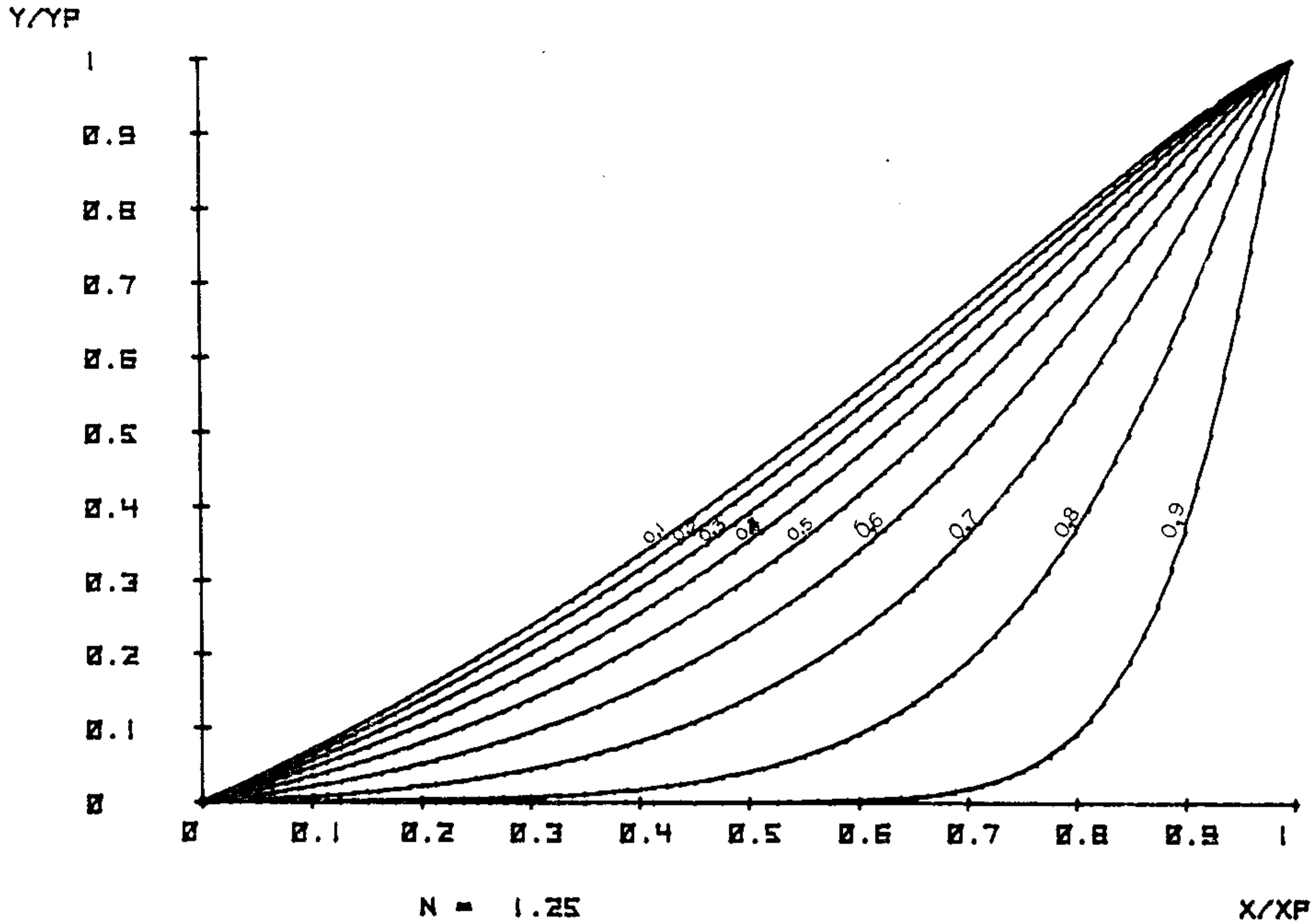
3. SNEDECOR, G.W. & COCHRAN, W. **Statistical methods.** 5.ed. Ames, Iowa, State University Press, 1962. 534 p.

```
10 REM — PROGRAMA P/ TRAÇADO
   DAS CURVAS SIGMÓIDES
20 REM — DEFINE OS LIMITES DO
   PLOTTER
30 SCALE —0.2,1.1,—0.2,1.1
40 REM — TRAÇADO DOS EIXOS
   X E Y
50 XAXIS 0,0.1,0,1
60 XAXIS 0,0.1,0,1
70 REM — ENUMERA OS
   INTERVALOS DE X
80 FOR I=O TO 1 STEP 0.1
90 PLOT I—0.1/3,—0.1/2,—1
100 LABEL (*)I
110 NEXT I
120 REM — ENUMERA OS
    INTERVALOS DE Y
130 FOR J=O TO 1 STEP 0.1
140 PLOT —0.12,J—0.1/8,—1
150 LABEL (*)J
160 NEXT J
170 REM — TRAÇADO DE UM
    CONJUNTO DE CURVAS DE
    MESMO N
180 DISP "VALOR DE N";
190 INPUT N
200 REM — P/ CADA Z TRACA UMA
    CURVA
210 FOR Z=1 TO 9
220 Z1=Z/10—1
230 FOR X=O TO 1 STEP 0.1/8
240 A=ABS((X—1)/(Z1)N
250 B=(ABS(1Z1))N
260 IF A < = 225 THEN 320
270 IF B < = 225 THEN 300
280 T=O
290 GOTO 360
300 T=(—EXP(—B))/(1—EXP(—B))
310 GOTO 360
320 IF B < = 225 THEN 350
330 T—EXP(—A)
340 GOTO 360
350 T=(EXP(—A)—EXP(—B))/
    (1—EXP(—B))
360 PLOT X,T
370 NEXT X
380 PEN
390 NEXT Z
400 REM — ESCREVE A POTÊNCIA N
410 PLOT (0.2,—0.15,—1
420 LABEL (*)"N = "N;
430 PEN
440 REM — DEFINE O EIXO X
450 PLOT 0.95,—0.15—1
460 LABEL (*)"X/XP"
470 PEN
480 REM — DEFINE O EIXO Y
490 PLOT —0.17,1.045,—1
500 LABEL (*)"Y/YP"
510 PEN
520 END
```

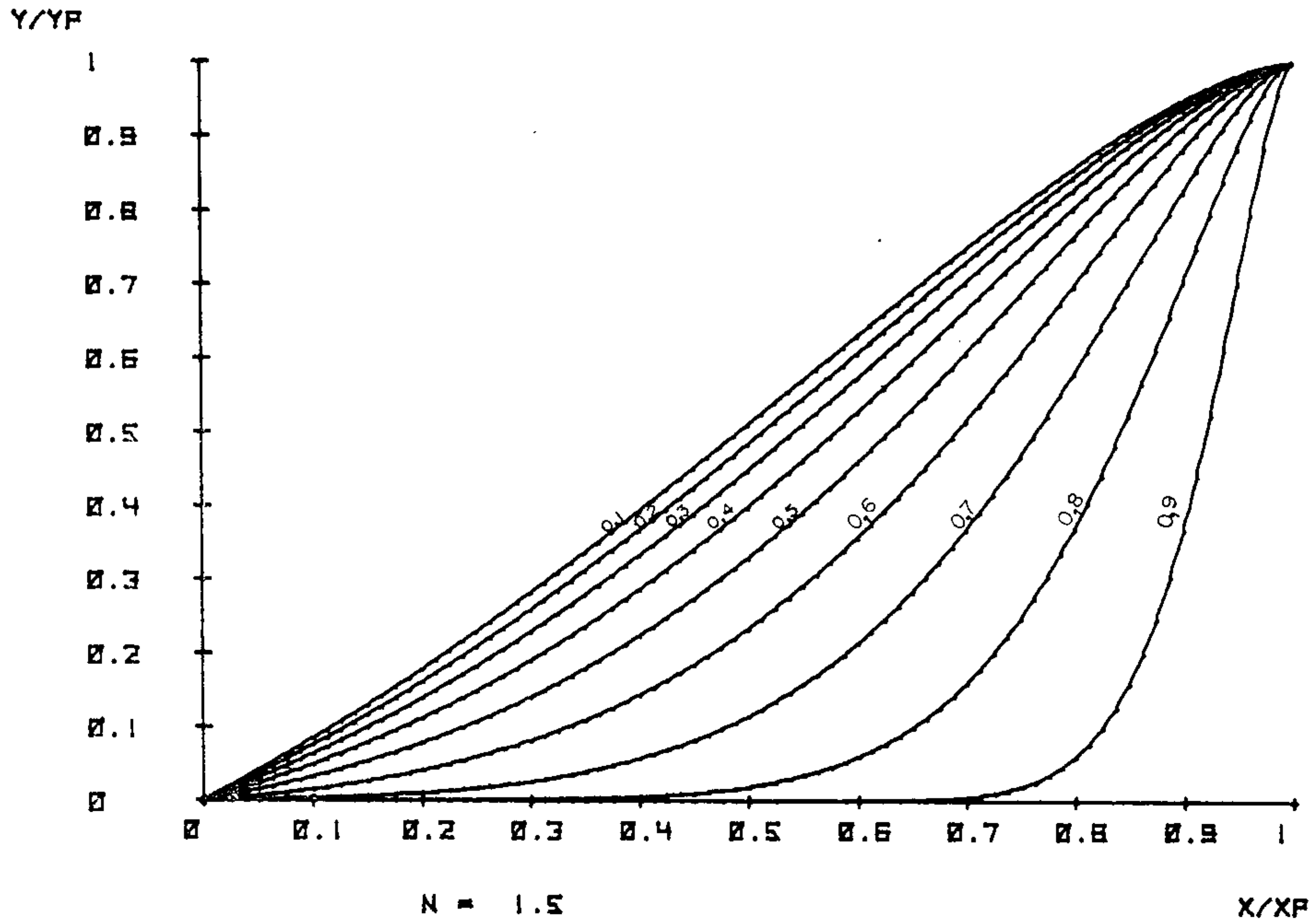

FLUXOGRAMA PARA TRAÇADO DAS CURVAS SIGMOIDES
INICIO
SCALE
(Define os limites do PLOTTER p/a traçar numa escala desejada)
XAXIS, YAXIS
(Traça os eixos X e Y de 0.0 a 1.0 dividindo-os em intervalos de 0.1 em 0.1
Enumera os intervalos de X
Enumera os intervalos de Y
Le o valor de N
Inicia o traçado das 9 curvas
Para Z = 1 até 9
Z1 = Z/10 - 1
Inicia o traçado de 1 curva para 1 valor Z1
Para X = 0 ate 1 de 0.1/8 em 0.1/8
A = (X - 1)/Z1 N
B = 1/Z1 N
NÃO
A < 225
B < 225
NÃO
SIM
T = 0
T = (-e^B)/(1-e^B)
B < 225
NÃO
T = e^-A
T = (e^-A - e^-B)/(1 - e^-B)
PLOT X,T
Desloca p/ a abcissa X
a ordenada T
CONTINUE
PEN
(Levanta a pena)
CONTINUE
Escreve o valor de N
Esc. o valor do eixo X
Esc. o valor do eixo Y
FIM

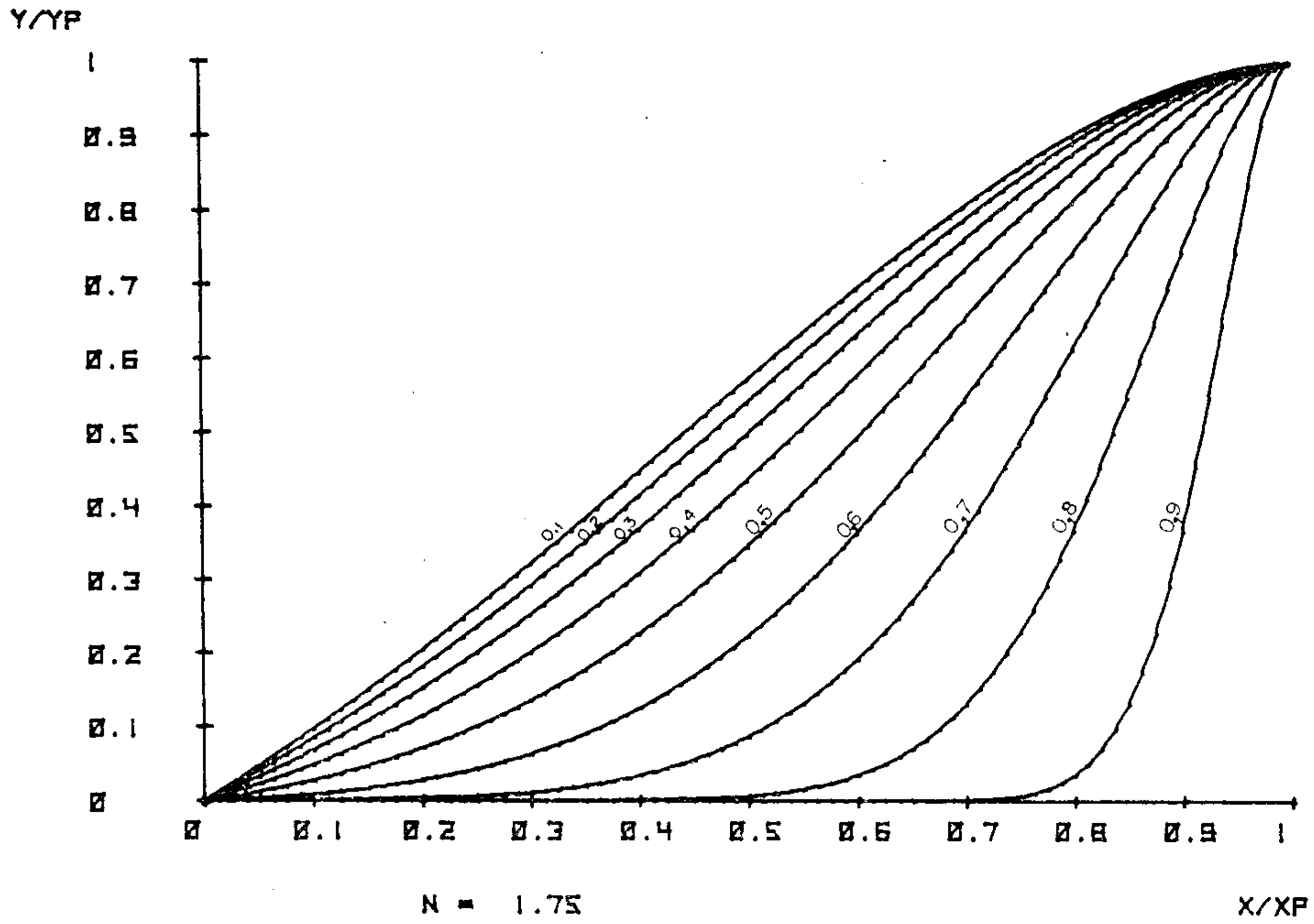


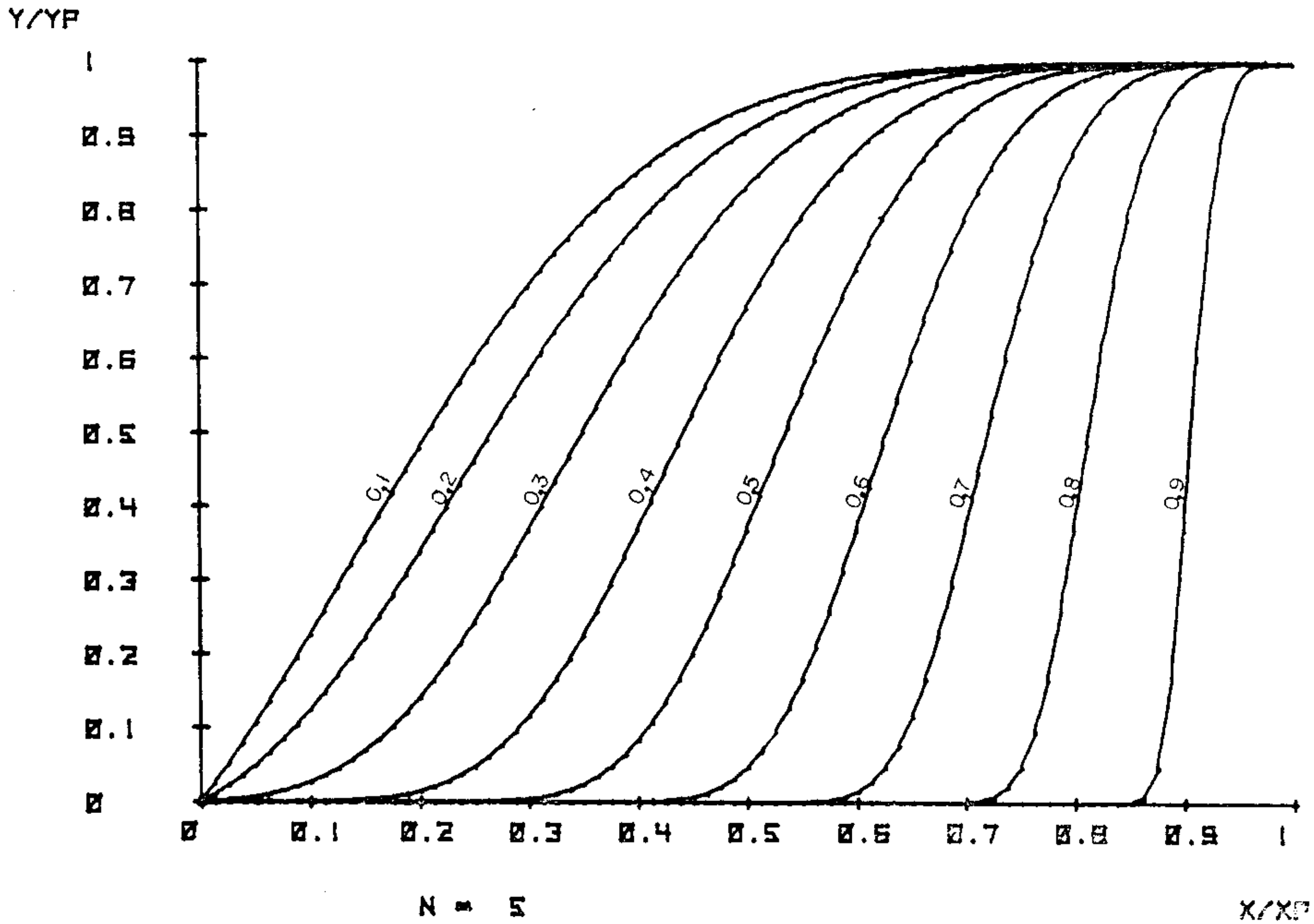
Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
N = 1
X/XP

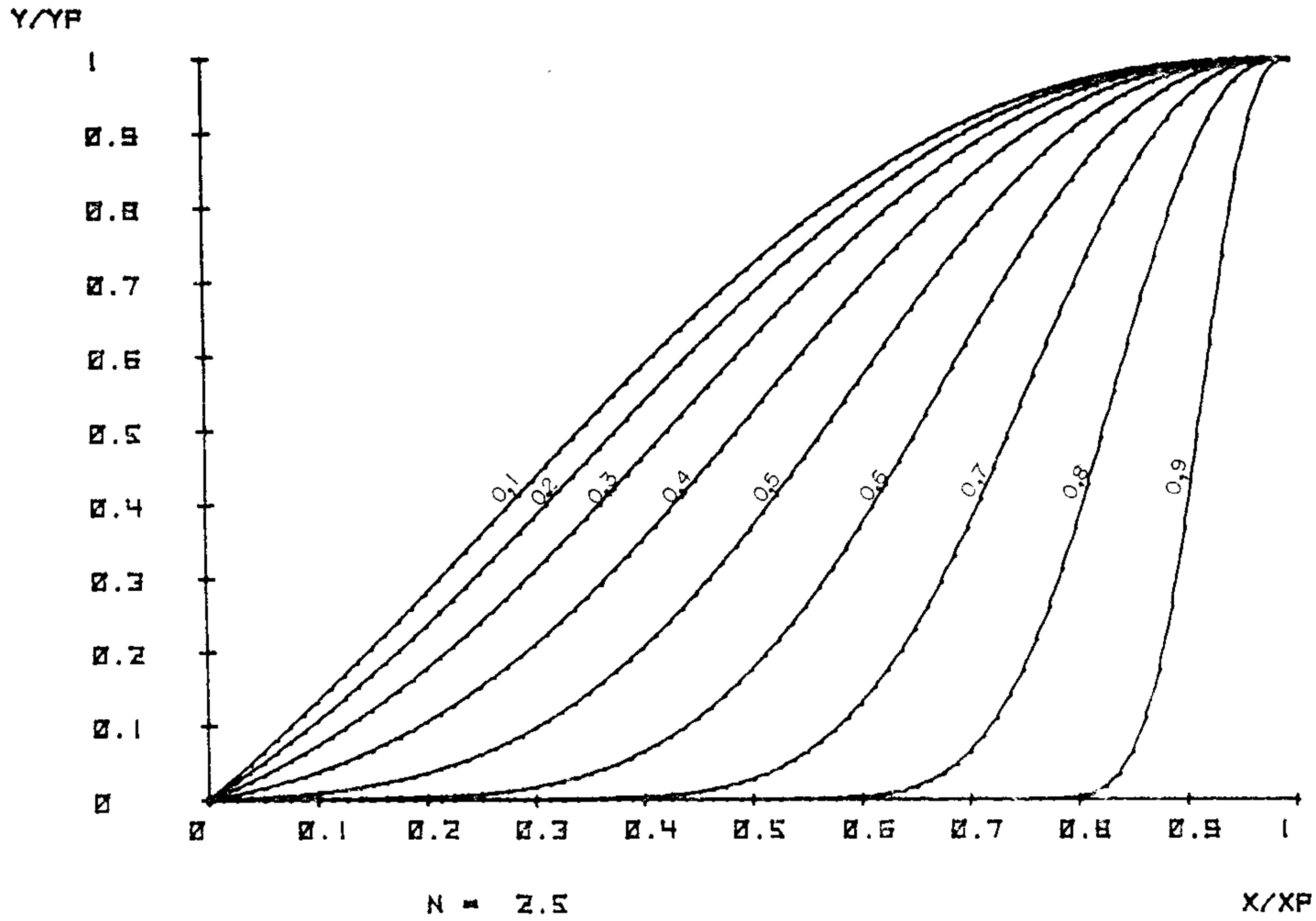


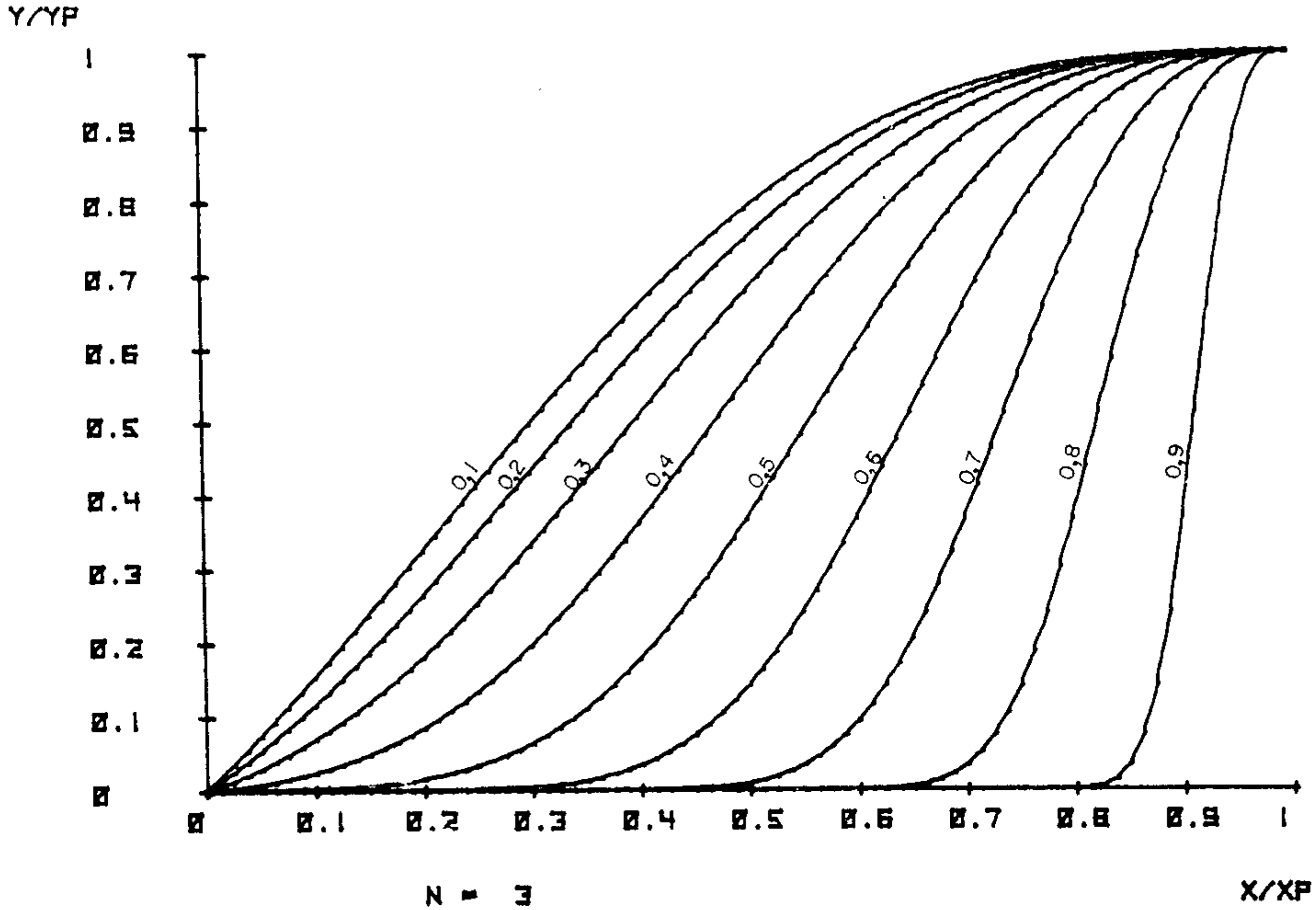
Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
N = 1.25
X/XP

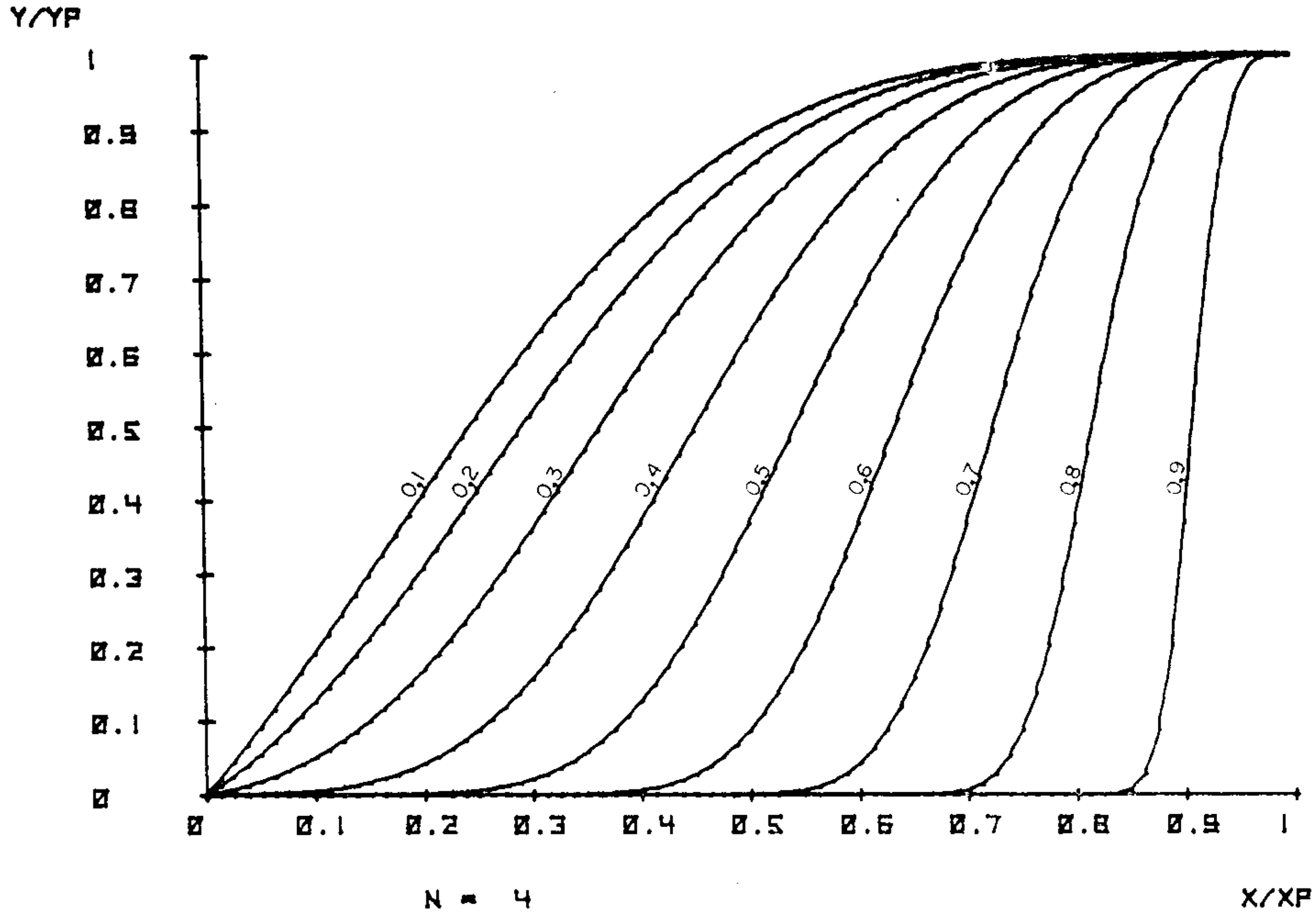

Y/YF
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
N = 1.5
X/XF


Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
N = 1.75
X/XP

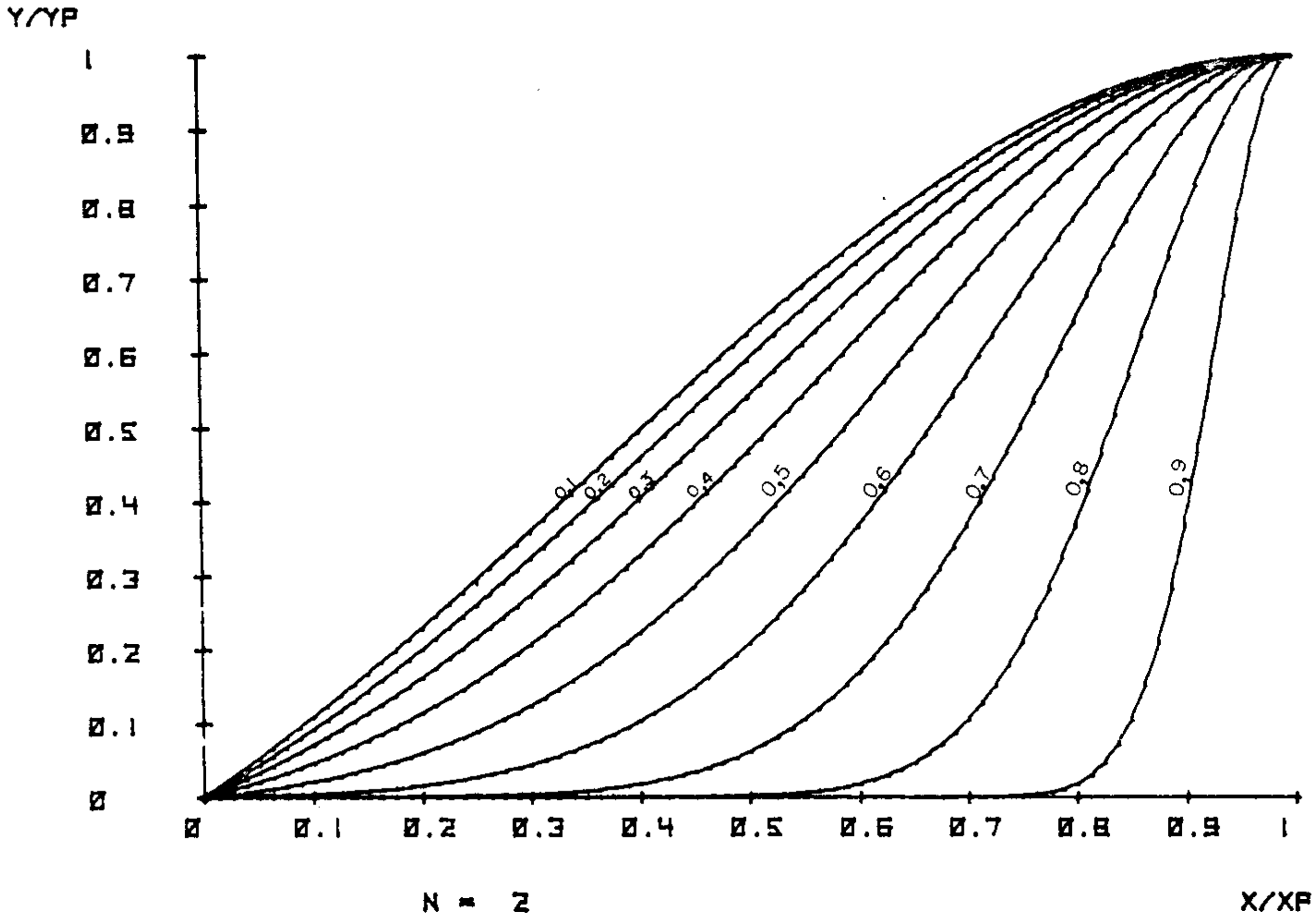

Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
N = 5
X/XP

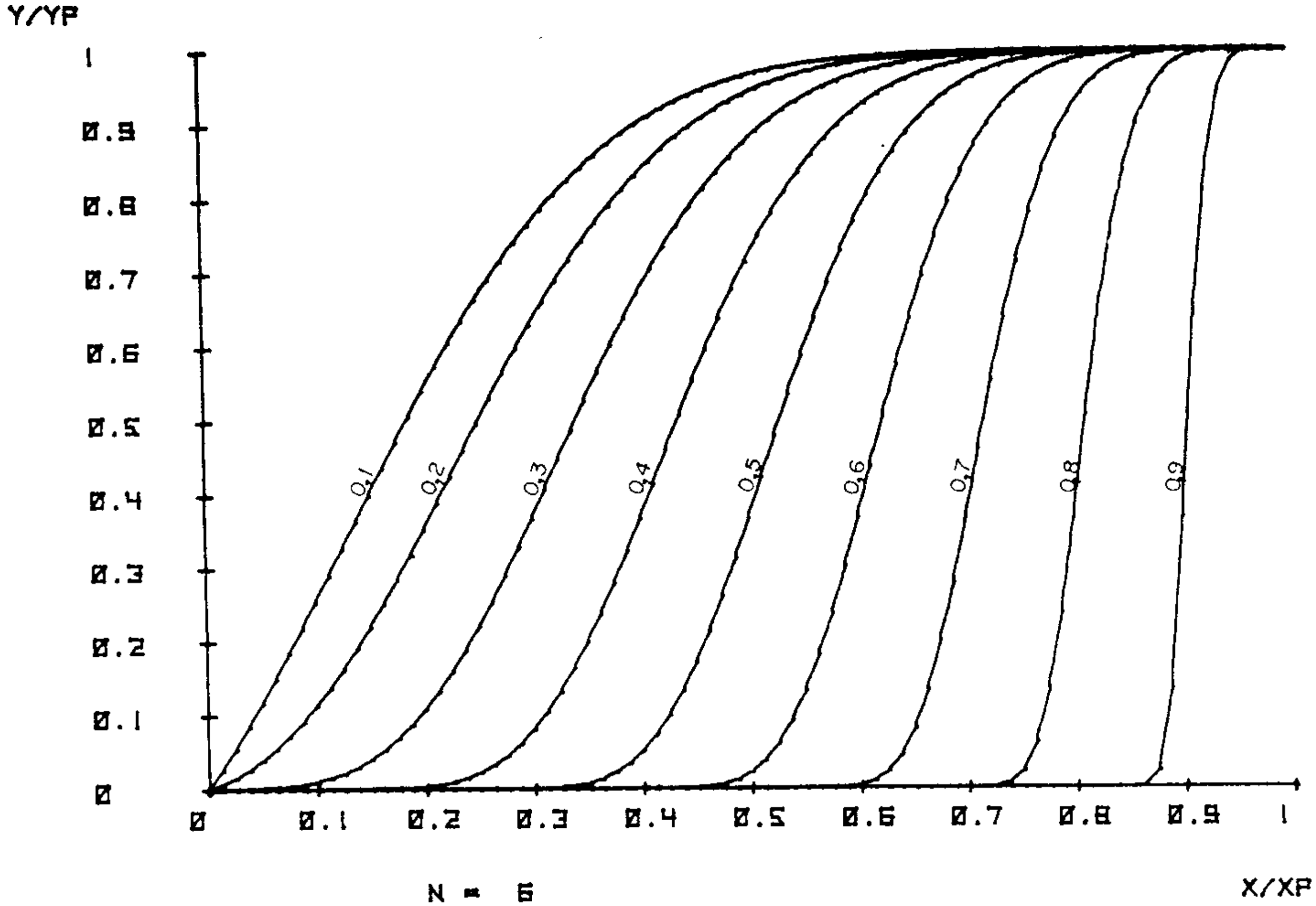

Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
N = 2.5
X/XP

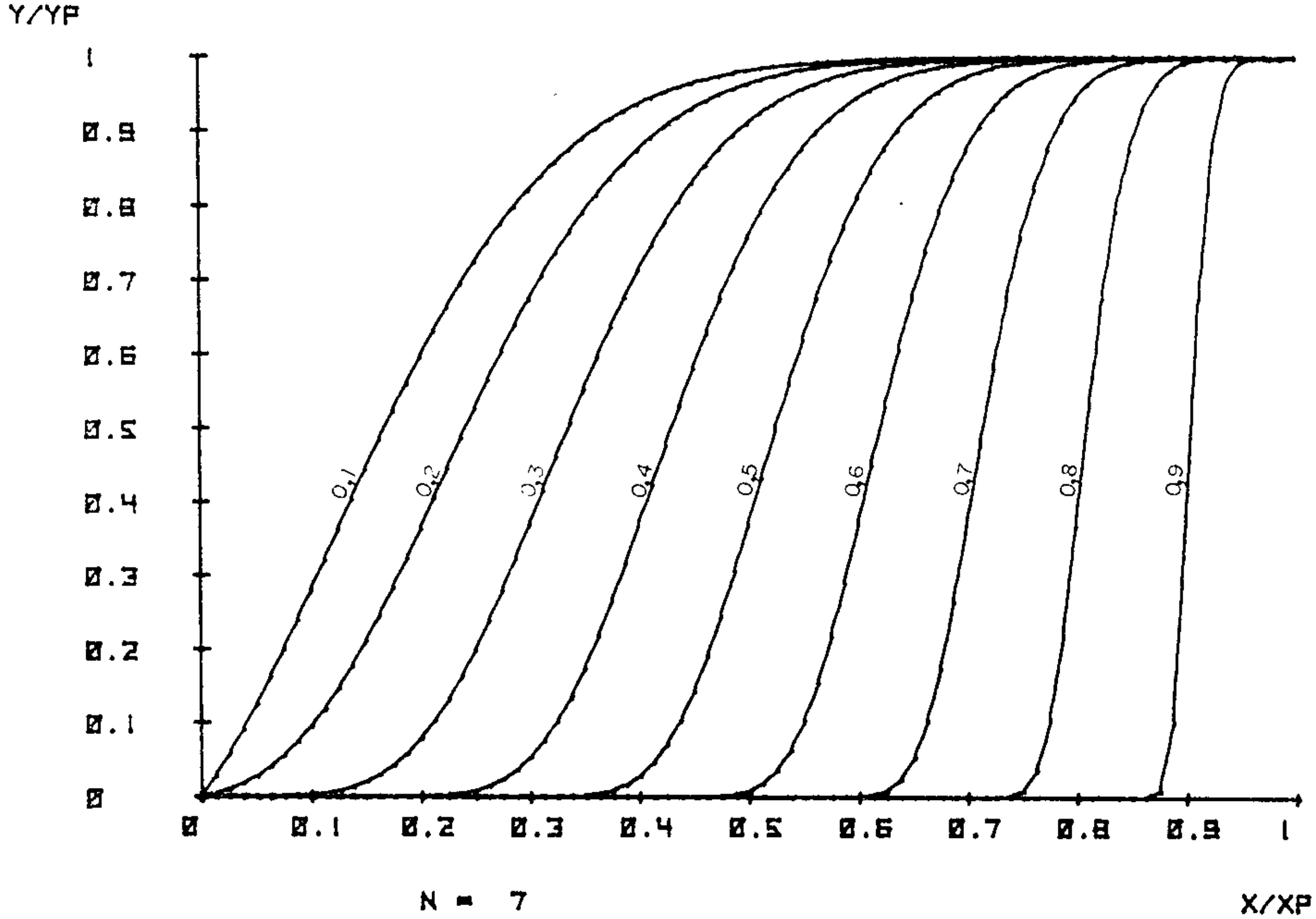

Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
N = 3
X/XP

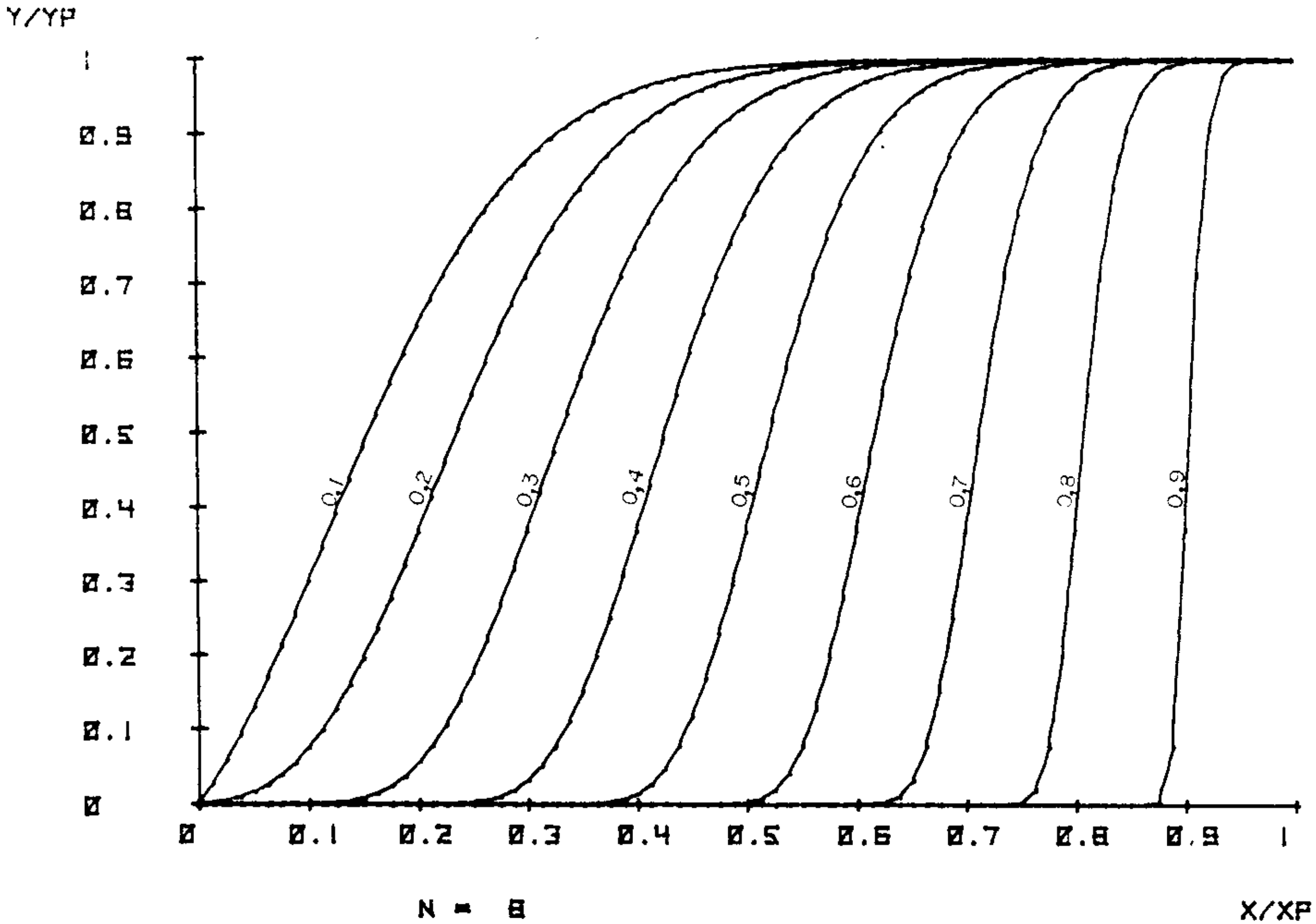


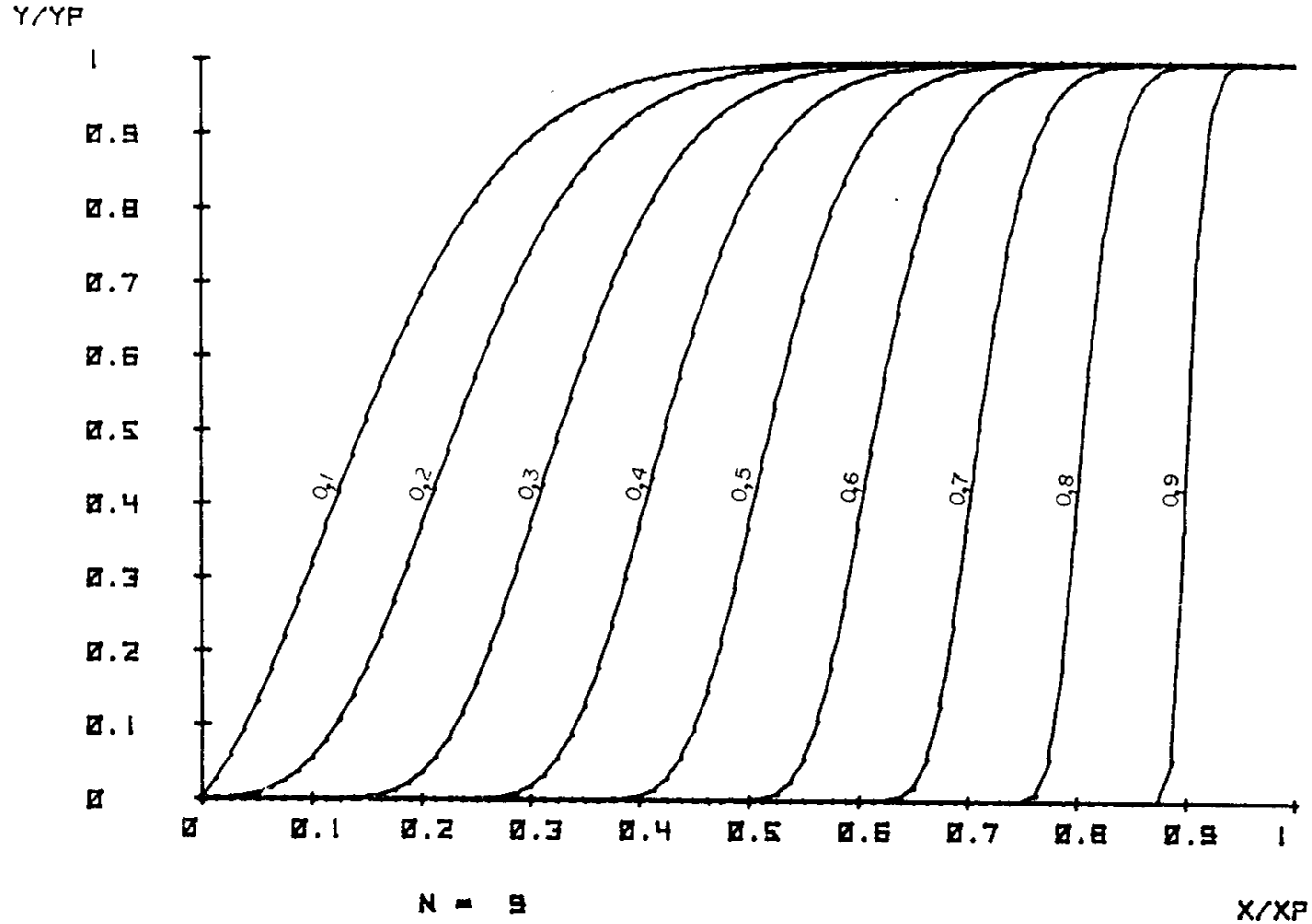
Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
N = 4
X/XP

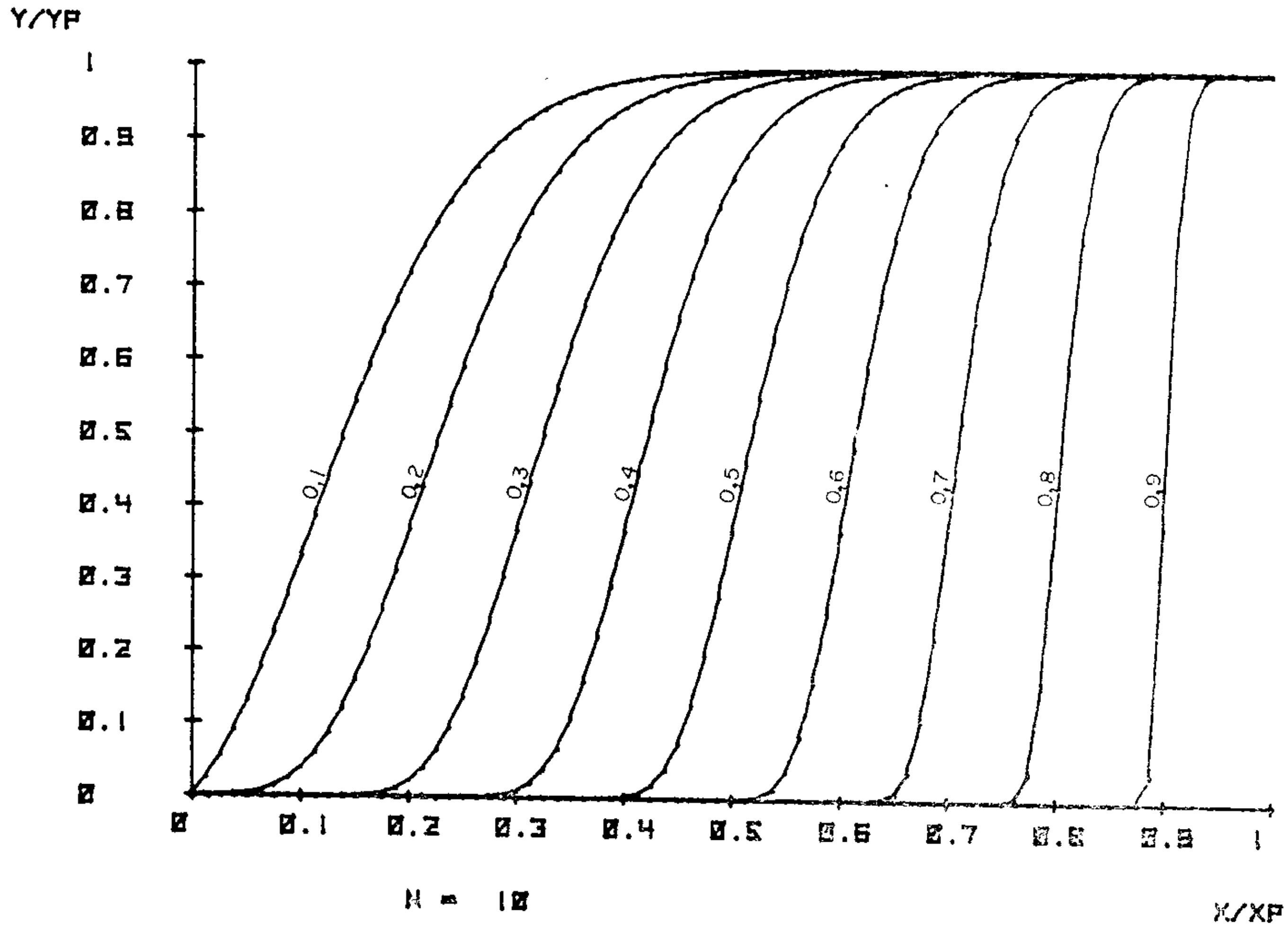

Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
N = 2
X/XP


Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
N = 6
X/XP


Y/YP
1
Ø.9
Ø.8
Ø.7
Ø.6
Ø.5
Ø.4
Ø.3
Ø.2
Ø.1
Ø
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
Ø
Ø.1
Ø.2
Ø.3
Ø.4
Ø.5
Ø.6
Ø.7
Ø.8
Ø.9
1
N = 7
X/XP


Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
N = 8
X/XP


Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
N = 9
X/XP


Y/YP
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
N = 10
X/XP