APLICAÇÕES DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS FLORESTAIS

Ronaldo Viana Soares *

SUMMARY

In this paper the author presents some examples to ilustrate the applicability of linear programming model in the solution — for some economic problems in forestry.

The use of computers in solving the problems of linear programming is also discussed. The author presents at the end, a FORTRAN program to solve this type of problems.

INTRODUÇÃO

O problema de como utilizar recursos limitados para alcançar benefícios ao máximo é bastante frequente em vários ramos da ciência florestal. Programação matemática é o nome dado ao conjunto de técnicas desenvolvidas para atacar êste tipo de problema.

A **Programação Linear,** a mais simples e mais amplamente usada destas técnicas é um método para decidir como encontrar alguns objetivos desejados, tais como minimização de custos ou maximização de benefícios, sujeitos a limitações nas quantidades de produtos requeridos ou recursos disponíveis.

O termo linear implica proporcionalidade. Isto significa que se 1 kg de um produto custa Cr$ 2,00, 10kg custarão Cr$ 20,00; se uma fábrica de papel produz 20t em 1 hora, produzirá 100t em 5 horas.

Geralmente, os problemas econômicos seguem a lei das proporções variáveis, cuja função característica está representada por uma linha curva razão pela qual, à primeira vista, a suposição de linearidade estaria em contradição com tal lei econômica. No entanto, dentro de certos limites, uma proporcionalidade geralmente existe, pelo menos aproximadamente, e por conseguinte os princípios de programação linear tem encontrado ampla aplicação. Podemos assumir portanto que a suposição de linearidade pode ser aplicada na maioria dos problemas econômicos.

ILUSTRAÇÃO

Um exemplo, sem dúvida alguma, poderá ilustrar melhor o tipo de problema para o qual a Programação linear pode ser usada com sucesso.

Exemplo nº 1: Um fabricante produz dois tipos de produto, I e II. Três máquinas, A, B e C, são necessárias para fabricar cada produto. Uma unidade de produto I requer 2 horas de trabalho da máquina A, 1 hora da máquina B e 6 horas da máquina C. Uma unidade do produto II requer, respectivamente, 2 horas, 5 horas e 2 horas de trabalho das máquinas A, B e C. Em um certo período, a máquina A está disponível por 24 horas, a máquina B por 44 horas e a C por 60 horas. O preço por unidade do produto I é Cr$ 6,00 e do produto II é Cr$ 9,00. Considerando-se que as máquinas estão disponíveis quando requeridas, quantas unidades de cada produto poderiam ser produzidas de modo a obter máximo benefício?

*) Professor da Faculdade de Florestas da U.F.P.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA:

RECURSO	DISPONIBILIDADE	REQUERIMENTO POR UNIDADE	
		PRODUTO I	PRODUTO II
Máquina A	24	2	2
Máquina B	44	1	5
Máquina C	60	6	2
Rendimento por unidade	—	Cr$ 6	Cr$ 9

Vamos assumir que x_1 seja o número de unidades de produto I produzidas e x_2 o número de unidade de produtos II produzidas.

O objetivo é produzir quantidades tais de produto I (x_1) e de produto II (x_2) que os benefícios sejam máximos, isto é, temos que maximizar a função:

$$6x_1 + 9x_2 \quad \text{(função objetivo)} \quad (1)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

e também

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 < 24 \\ x_1 + 5x_2 < 44 \\ 6x_1 + 2x_2 < 60 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Estas restrições podem ser facilmente explicadas:

Primeiro, x_1 e x_2 não podem ser negativos pois é impossível produzir menos que nada de qualquer produto.

Segundo, cada uma das x_1 unidades do produto I e as x_2 unidades do produto II requerem 2 horas da máquina A, isto é, um total de $2x_1 + 2x_2$ é requerido.

Como a máquina A somente está disponível 24 horas por certo período, significa que $2x_1 + 2x_2$ deve ser menor ou igual a 24. Isto pode ser representado algebricamente pela inequação

$$2x_1 + 2x_2 < 24$$

Seguindo o mesmo raciocínio, as limitações impostas pelas máquinas B e C podem ser representadas por $x_1 + 5x_2 \leqslant 44$ e $6x_1 + 2x_2 \leqslant 60$, respectivamente.

Esta é então a formulação "standard" de um problema de programação linear. Qualquer par de valores de x_1 e x_2 que satisfaçam ao conjunto de inequações (2) e (3) é uma solução possível para o problema. A solução ótima é aquela, dentre as possíveis, que também satisfaça à função objetivo (1).

Solução do Problema: Como o problema consiste de apenas 2 incógnitas (x_1 e x_2), podemos usar o método gráfico para obter a solução.

Uma equação do tipo $2x_1 + 2x_2 = 24$ define uma linha reta no plano que tem como coordenadas x_1 e x_2 (figura 1). Uma inequação com os mesmos componentes, por conseguinte, define a área limitada pela mesma linha. A **região A** (figura 1), incluindo a linha reta, é definida pela inequação $2x_1 + 2x_2 \leqslant 24$, enquanto a região B é definida por $2x_1 + 2x_2 \geqslant 24$.

Estabelecendo as outras linhas retas que correspondem ao nosso problema, obtemos a região que satisfaz o conjunto de inequação (2) e (3). Isto é mostrado na figura 2. A região assinalada contém todos os pares de valores de x_1 e x_2 que são soluções possíveis para o problema, daí seu nome — Região Fatível. Dentro desta região buscamos o valor que maximiza a função objetivo (benefícios) $6x_1 + 9x_2$.

Existem vários pares de valores de x_1 e x_2 que conduzem ao mesmo benefício. Um benefício de Cr$ 36, por exemplo, poderia ser obtido por todos pares de valores de x_1 e x_2, satisfazendo a equação $6x_1 + 9x_2 = 36$ isto é, estabelecendo a linha de função objetivo (figura 3).

A linha de função objetivo para qualquer outro benefício deve ser uma linha paralela à estabelecida. Esta linha deve ser mais próxima à origem para menores benefícios e deve se afastar tanto da origem quanto maiores forem os benefícios. O valor máximo da função objetivo, o qual satisfaz todos os pré-requisitos, é determinado pelo ponto que, embora dentro da **região fatível,** situa-se em uma linha paralela à linha da função objetivo, tão distante quanto possível da origem. Na figura 3, pode se observar que o **ponto Q** é tal ponto.

Os valores de x_1 e x_2 correspondentes ao ponto **Q** podem ser lidos diretamente no gráfico e representam a solução do problema.

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 8$$

Isto significa que o benefício máximo se obtém quando se produz 4 unidades do produto I e 8 unidades do produto II, sendo este benefício total igual a

$$Bm = (4x6) + (8x9) = Cr\$ \ 96{,}00$$

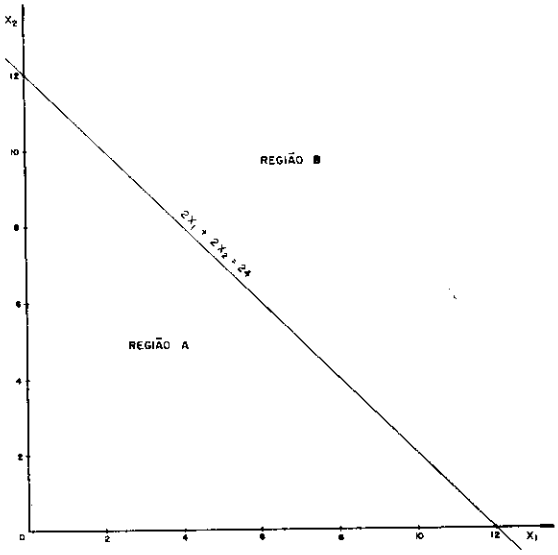
Substituindo os valores de x_1 e x_2 no conjunto de inequações (3), notamos que as duas primeiras inequações são satisfeitas como equações:

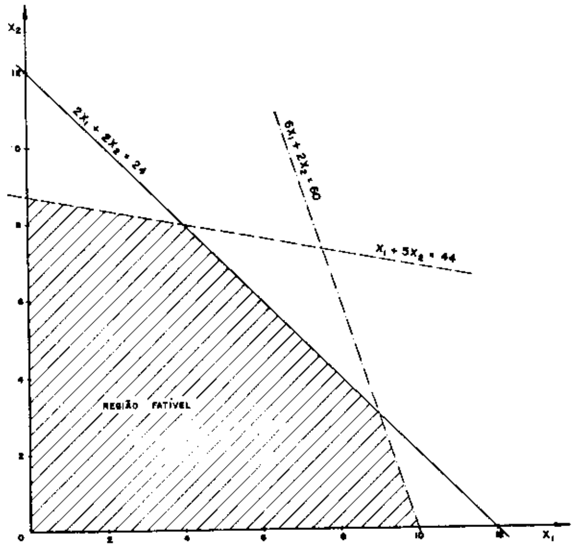
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 & \leqslant & 24 \\ 2x4 + 2x8 & \leqslant & 24 \\ 24 & = & 24 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1 + 5x_2 & \leqslant & 44 \\ 4 + 5x8 & \leqslant & 44 \\ 44 & = & 44 \end{array}$$

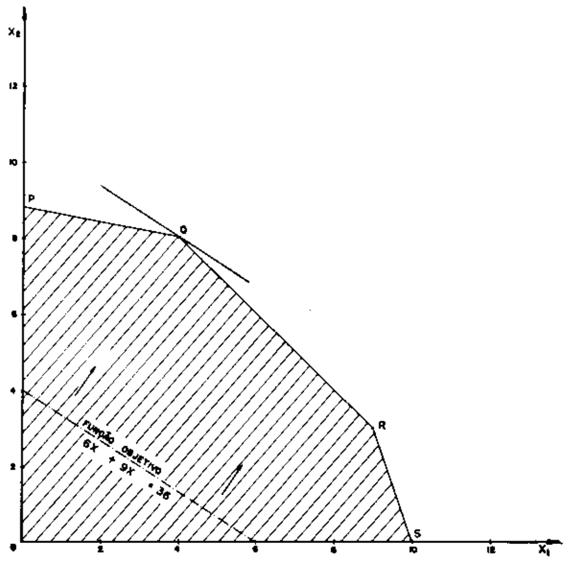
Isto significa que as máquinas A e B são utilizadas plenamente. Há no entanto uma capacidade ociosa de 20 horas na máquina C:

$$6x_1 + 2x_2 \leqslant 60$$
$$6x4 + 2x8 \leqslant 60$$
$$40 \leqslant 60$$

O fato de que as máquinas A e B estão plenamente utilizadas pode ser deduzido diretamente do gráfico, pois o ponto **Q** está exatamente na interseção das linhas retas que representam a restrição de cada uma destas duas máquinas.







Em qualquer problema de programação linear de duas variáveis, a **Região Fatível** pode ser representada graficamente, como no exemplo anterior, por um polígono convexo.

O método gráfico de solução pode ser extendido ao caso de três produtos, isto é, três variáveis (x_1. x_2. x_3.) Nêste caso cada restrição é representada por um plano em três dimensões e a região fatível limitada por êstes planos é um poliedro convexo.

Como no caso de duas variáveis, a função objetivo atinge seu máximo valor em um ponto extremo da tri-dimensional região fatível.

O método gráfico, obviamente, não apresenta valor prático quando o número de variáveis excede a três. De fato, êle não é recomendado como método viável mesmo no caso de três variáveis. Ele pode, no entanto, servir de base para método sistemático de solução de problemas de programação linear, pois o método de solução usado para resolver problemas mais complexos — Métodos Simples — é baseado no mesmo raciocínio.

GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Tendo considerado e resolvido um exemplo simples, podemos agora formular o problema geral de programação linear, com a seguinte apresentação:
maximise

$$C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_N\, x_N \quad \text{(função objetivo)} \quad (1)$$

sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

e também

$$\left.\begin{array}{llllllll} a_{11} & x_1 & + a_{12} & x_2 & + \ldots\ldots\ldots & + a_{1N} & x_N & \leqslant b_1 \\ a_{21} & x_1 & + a_{22} & x_2 & + \ldots\ldots\ldots & + a_{2N} & x_N & \leqslant b_2 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ a_{M1} & x_1 & + a_{M2} & x_2 & + \ldots\ldots\ldots & + a_{MN} & x_N & \leqslant b_M \end{array}\right\} \quad (3)$$

ou, no caso de **minimização:**

minimise

$$C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + C_N\, x_N \quad \text{(função objetivo)} \quad (1)$$

sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}\ x_2 + a_{12}\ x_2 + \ldots\ldots + a_M\ x_N \geqslant b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots\ldots + a_{2N}\ x_N \geqslant b_2 \\ \vdots \\ a_{M1}\ x_1 + a_{M2}\ x_2 + \ldots\ldots + a_{MN}\ x_N \geqslant b_M \end{array}\right\} \quad (3)$$

Qualquer problema que pode ser formulado desta forma, com $a_{11}\ldots\ldots a_{MN}$, $b_1\ldots\ldots b_M$ e $c_1\ldots\ldots c_N$ conjuntos de constantes e $x_1\ldots\ldots x_N$, conjunto de variáveis, é um problema de Programação Linear que pode ser resolvido pelo **Método Simplex.**

USO DO COMPUTADOR NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

O Método Simplex, utilizado para resolver problemas mais complexos na Programação Linear (três ou mais variáveis) consiste apenas de simples artifícios (ou passos) matemáticos, que no entanto tornam por demais laboriosa e extensa uma solução manual. Por isto o método é usado de maneira ideal através de computadores eletrônicos.

Programas "standards" de Programação Linear tem sido preparados para a maioria dos computadores, de modo que a única preparação necessária é ordenar os dados de algum modo pré-determinado a fim de introduzi-los na máquina. Assim, os resultados de um cálculo que poderia tomar vários dias se feito manualmente podem ser obtidos através de um computador em questão de segundos.

Para exemplificar o uso do computador na solução de problemas de Programação Linear usaremos um dos vários programas sobre o assunto existentes na biblioteca de programas do Centro de computação do C.T.E.I. Trata-se do programa denominado "Programacion Convexa", elaborado em linguagem FORTRAN, para utilização em computadores IBM 1130.

Usaremos três exemplos para mostrar como funciona o programa: um de minimização (exemplo 2), outro de maximização (exemplo 3) com duas variáveis e um terceiro também de maximização (exemplo 4) com três variáveis.

Características Gerais do Programa: O programa funciona com um máximo de 34 equações e 16 incógnitas. Se dão a ler as variáveis N,MeK, que são respectivamente o número de componentes de cada vetor A, o número total de inequações e o número de inequação da função F (função objetivo). Êstes dados vão no primeiro cartão que se deve perfurar. A variável N se perfura na coluna 4, a M na 8 e a K na 12. No cartão seguinte se perfuram os coeficientes as função objetivo. Depois, nos outros cartões se perfuram os componentes de uma matriz diagonal igual ao número de variáveis do problema. Nos demais cartões se perfuram os coeficientes das inequações do problema (uma inequação por cartão). As perfurações devem ser feitas em formato 10, isto é, existem 10 colunas para cada dado, começando da coluna nº 1.

Exemplo nº 2 (Minimização de Custos): Um silvicultor necessita comprar diferentes tipos de fertilizantes. Cada um deles contém, em proporções variáveis, alguns ou todos os 4 ingredientes considerados essenciais ao bom crescimento das árvores. Cada fertilizante tem também diferentes custos por kilograma. O silvicultor pretende determinar o menor custo de fertilização que forneça o mínimo exigido para cada igrediente nutricional. O quadro que segue contém todas as informações necessária sobre a composição dos dois fertilizantes, seus custos, bem como o mínimo mensal requerido de cada nutriente por planta.

A solução para o problema consiste em especificar as quantidades de cada um ou uma combinação dos dois fertilizantes. As variáveis de decisão são por conseguintes o número de gramas de fertilizantes I e II necessários para cada planta por um custo mínimo.

Portanto,

x_1 representa o nº de gramas de fertilizante I
x_2 representa o nº de gramas de fertilizantes II

		CONTEUDO POR GRAMA	
Igrediente	**Mínimo Requerido por Árvore** (cg)	**Fertilizante I** (cg)	**Fertilizante II** (cg)
A	90	5	10
B	48	4	3
C	1,5	0,5	0
D	20	2	1
CUSTO/kg	—	Cr$ 2	Cr$ 3

minimizar:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{(função objetivo)} \quad (1)$$

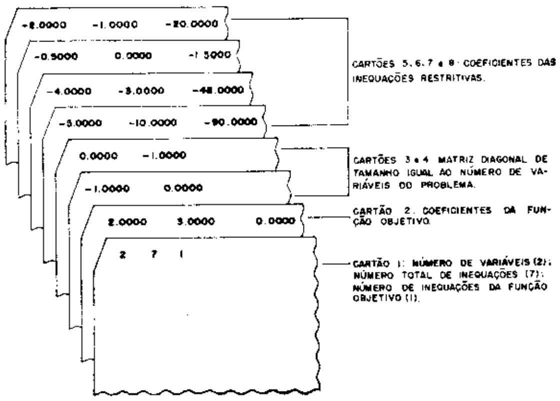
sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

e também

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 &\geqslant 90 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geqslant 48 \\ 0{,}5x_1 \qquad &\geqslant 1{,}5 \\ 2x_1 + x_2 &\geqslant 20 \end{aligned}$$

De acordo com os problema utilizado, para êste problema temos que perfurar 8 cartões, conforme mostrado na figura 4.



Observação: Como se trata de um problema de **minimação**, o programa exige que todas as inequações (exceto a função objetivo) levem signo **negativo.** Quando se trata de **maximização** os dados entram com signo positivo, exceto a matriz diagonal, que se mantém negativa e a função objetivo, que passa a negativa.

O programa fonte (anexo 2) exige ainda, para trabalhar, duas sub-rotinas (Rowin e Gauss) (anexo 1).

Entrando com todos os dados no computador, imediatamente os resultados.

Nêste caso, a combinação ótima seria:

$$\left\{\begin{array}{l} 8{,}4 \text{ g de fertilizante I} \\ 4{,}8 \text{ g de fertilizante II} \end{array}\right.$$

O custo total mínimo por árvore seria:

$$\begin{aligned} C_{MIN} &= 2x_1 + 3x_2 \\ C_{MIN} &= 2x8{,}4 + 3x4{,}8 \\ C_{MIN} &= \text{Cr\$ } 31{,}2 \end{aligned}$$

Exemplo nº 3 (maximização de benefícios): Um fabricante de móveis produz dois tipos de mesa: **moderna** e **colonial.** Essas mesas são vendidas através de uma cadeia de lojas e considera-se que existe um mercado ilimitado para quaisquer quantidades dessas mesas, pelo menos dentro da capacidade de produção dêste fabricante. As mesas devem passar por quatro operações básicas: corte da madeira, colagem, montagem e acabamento. A tabela que apresentamos a seguir contém todas as informações concernentes a tempo de produção por mesa produzida e capacidade de produção para cada operação por dia, bem como o lucro líquido por unidade. O fabricante de móveis deseja determinar as quantidades de cada produto que maximiza seu lucro líquido diário.

		REQUERIMENTO POR UNIDADE	
Operações	**Capacidade em horas**	**Mesa Moderna**	**Mesa Colonial**
Corte em horas/mesa	8	0,4	0,6
Colagem em horas/mesa	15	1	1,5
Montagem em horas/mesa	8	1/3	1
Acabamento em hora/mesa	32	8/3	2
Lucro líquido/mesa	—	Cr$ 15	Cr$ 15

x_1 representa o nº de mesas do tipo moderno
x_2 representa o nº de mesas do tipo colonial

O nosso objetivo é:

maximizar

$$z = 15x_1 + 15x_2 \quad \text{(I)}$$

sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{(II)}$$

e também

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 \leqslant 8 \\ x_1 + 1{,}5x_2 \leqslant 15 \\ 1/3x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ 8/3x_1 + 2x_2 \leqslant 32 \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Como no exemplo anterior (nº 2), devemos perfurar 8 cartões, com os respectivos dados. Como também já mencionamos anteriormente, os coeficientes da função objetivo (I) devem ser perfurados com signo negativo. A matriz diagonal (neste caso também de tamanho 2 pois são duas variáveis) também deve ir com signo negativo. Os coeficientes das inequações de restrições (III) se perfuram como se apresentam no problema, isto é, todos positivos.

Colocando os dados e o respectivo programa na computadora, temos os resultados.

$$\begin{cases} 9 \text{ unidades da mesa moderna} \\ 4 \text{ unidades da mesa colonial} \end{cases}$$

O lucro líquido total máximo diário é

$$L_M = 15x9 + 15x4$$
$$L_M = \text{Cr\$ } 195$$

Exemplo nº 4 (maximização de benefícios): Um proprietário dispõe de 200 ha aptos para produção de madeira. Existem três alternativas: produzir madeira para celulose; produzir madeira para serraria; produzir madeira para laminado. De acordo com as disponibilidades de recursos, qual a combinação de produção que daria maior benefício? Os dados para o problema são:

Recursos	Disponibilidades	REQUERIMENTO P/ UNIDADE (HA)		
		Madeira para Celulose	**Madeira para Serraria**	**Madeira para Laminado**
terra	200 ha	4	1,25	1
capital	Cr$ 600.000	2.000	5.000	6.000
mão de obra	300.000 horas	500	1.500	2.500
Retorno líquido p/ha em Cr$ 1.000	— —	40	100	120

x_1 representa quantos hectares devem ser dedicados a madeira para celulose
x_2 " " " " " " " " " serraria
x_3 " " " " " " " " " laminado

Nosso objetivo é maximizar

$$z = 40x_1 + 100x_2 + 120x_3$$

sujeito a

$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$
$$x_3 \geqslant 0$$

e também

$$4x_1 + 1{,}25x_2 + x_3 \leqslant 200$$
$$2.000x_1 + 5000x_2 + 6000x_3 \leqslant 600.000$$
$$500x_1 + 1500x_2 + 2500x_3 \leqslant 300.000$$

A perfuração dos dados nos cartões se faz do mesmo modo que no caso anterior, com a diferença de que agora temos 3 variáveis e portanto a matriz diagonal deve ser de tamanho 3. Na figura 5 se pode observar os dados do problema já perfurados nos cartões.

Entrando com os dados no computador, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 100 \end{cases}$$

Ingresso máximo = 120.000 x 100
Im = Cr$ 12.000.000

Isto significa que com as restrições apresentadas, para obter o máximo ingresso, devemos somente produzir madeira para laminado, em 100 ha, ou seja, de uma área total de 200 ha, a metade ficaria sem aproveitamento. Isto sucedeu porque existiu um fator muito limitante e substituindo os valores x_I nas equações podemos notar isto:

a) **Fator terra:**

$$4 \times 0 + 1{,}25 \times 0 + 1 \times 100 \leqslant 200$$
$$100 \leqslant 200$$

b) **Fatos mão de obra:**

$$500 \times 0 + 1500 \times 0 + 2.500 \times 100 \leqslant 300.000$$
$$250.000 \leqslant 300.000$$

c) **Fator capital:**

$$2000 \times 0 + 5.000 \times 0 + 6.000 \times 100 \leqslant 600.000$$
$$600.000 \leqslant 600.000$$

O capital nêste caso é nitidamente limitante e isto impossibilita o uso pleno dos outros recursos.

Observação:

Como êstes dados são fictícios, o resultado obtido foi bastante raro, porém decidimos conservar o exemplo para ilustrar como certas restrições, como por exemplo a presença de um fator muito limitante, podem afetar um problema de Programação Linear.

```
* IOCS (CARD, 1132 PRINTER)
* LIST  SOURCE PROGRAM
C  PROGRAMACION CONVEXA
C  FM 1822 TEORIA DE APROXIMACION 1 PRIMER SEMESTRE 1971
C  EL PROGRAMA FUNCIONA CON UN MAXIMO DE TREINTA Y CUATRO ECUACIONES Y
C  DIECISEIS INCOGNITAS
C  SE DAN A LEER LAS VARIABLE N,M,K, QUE SON RESOECTIVAMENTE EL NUMERO
C  DE COMPONENTES DE CADA VECTOR A, EL NUMERO DE DESIGUALDADES TOTAL, Y
C  EL NUMERO DE DESIGUALDADES DE LA FUNCION F
      DIMENSION A (34,17), B (34), IJ (17), R (17), BG (17)
      WRITE (3,95)
95    FORMAT (50H CL PROFESOR CARLOS BERKOVICS, PROMACION CONVEXA)
903   READ (2,100) N,M,K
100   FORMAT (314)
      IF(N) 900, 900, 901
900   CONTINUE
      CALL EXIT
901   CONTINUE
      DO 71 I = 1, M
71    READ (2,101) (A (I, J),. J = I, N), B (I)
101   FORMAT ((8F10.4))
      WRITE (3,102)
102   FORMAT (51H1LAS DESIGUALDADES QUE CORRESPONDEN A FUNCION F SON)
      DO 72 I = 1, K
72    WRITE (3,101) (A (1, J), J = 1, N), B (I)
      WRITE (3,103)
103   FORMAT (/52H LAS DESIGUALDADES QUE CORREPONDEN A LA FUNC. G SON)
      KM1 = K + 1
      DO 161 I = KM1, M
161   WRITE (3,777) (A (I, J), J = 1, N, B (I)
777   FORMAT (1H, 12F10.4)
      IC = N + 1
      NM1 = N + 1
      DO 1 I = 1, NM1
1     IJ (I) = I
C  DEPOSITAMOS LOS VALORES DE LA MATRIZ A EN LA MATRIZ TRANSPUESTA AG
C  A+A DANDOLE UNA FILA DE UNOS, PARA USAR LA SUBRUTINA GAUSS Y ASI DETER
C  MINAR LOS COEFICIENTES THETA
30    CONTINUE
      DO 2 I = 1, NM1
      IP = IJ (I)
      DO 2 J = 1, N
2     AG (J, I) = (IP, J)
      DO 3 L = 1, NM1
3     AG (NM1, L) = 1
      DO 4 I = 1, N
4     TH (I) = 0.
      TH (NM1) = 1.
      CALL GAUSS (NM1, AG, TH, MI)
      IF (MI) 73, 74, 73
74    WRITE (3,104)
104   FORMAT (/51H CONDICIONES DE HAAR FALLAN LOCALMENTE EN EL TANTEO)
      GO TO 6
73    WRITE (3,105) (TH (I), I = 1, NM1)
105   FORMAT (/70H ESTOS SON LOS THETA CALCULADOS POR GAUSS. PROBAREMOS
      1SI SON POSITIVOS//, (1H0, 8E15.8))
      DO 5 I = 1, NM1
```

```
      IF 5 (TH (I)) 6, 6, 5
5     CONTINUE
      GO TO 15
C  SI SON TODOS LOS THETA POSITIVOS SE REALIZARA LA PROGRAMACION CONVEXA
C  EN CASO CONTRARIO SE CALCULA UM NUEVO CONJUNTO J PRIMA
6     IF (IJ (NM1) — M) 8, 9, 9
8     IJ (NM1) = IJ (NM1) + 1
      GO TO 30
9     CONTINUE
      DO 10 J = KM1, N
10    IJ (J) = IJ (J) + 1
      IC = IC + 1
      IJ (NM1) = IC
     IF (IJ (NM1) —M) 30, 30, 12
12    WRITE (3,200)
200   FORMAT (/39H USTED HA FRACASADO REORDENE SUS DATOS)
      GO TO 903
C  EN ESTOS MOMENTOS DA INICIO LA PROGRAMACION CONVEXA
C  MEDIANTE GAUSS CALCULAMOS EL SISTEMA
C  RIJ (X) IGUAL A LANDA SI 1 MENOS O IGUAL A IJ MENOR O IGUAL A K
C  RIJ (X) IGUAL A CERO SI K MENOR QUE IJ MENOR O IGUAL A M
15    CONTINUE
      DO 16 I = 1, MN1
     IP = IJ (I)
      DO 16 J = 1, N
16    AG (I, J) = A (IP, J)
      DO 17 I = 1, K
17    AG (I, NM1) = 1.
      KM1 = K + 1
      DO 18 I = KM1, NM1
18    AG (I, NM1) = 0.
      DO 19 I = 1, NM1
      IP = IJ (I)
19    BG (I) = B (IP)
      CALL GAUSS (NM1, AG, BG, MI)
      IF (MI) 20, 21, 20
21    WRITE (3,201)
201   FORMAT (/59H USTED FRACASO OTRA VEZ LE FALLAN LAS CONDICIONES DE 1HAAR)
C  ANTE EL FRACASO SE SELECCIONA UN NUEVO INDICE IALFA
      GO TO 903
20    IALFA = K + 1
      SUM = 0.
      DO 22 J = 1, N
22    SUM = SUM + A (IALFA, J) * BG (J)
      RAL = SUM — B (IALFA)
      KM2 = K + 2
      DO 23 I = KM2, M
      SUM = 0.
      DO 50 J = 1, N
50    SUM = SUM + A (I, J) * BG (J)
      R (I) = SUM — B (I)
      IF (RAL — R (I)) 24, 23, 23
24    RAL = R (I)
      IALFA = I
23    CONTINUE
      IF (RAL) 26, 26, 501
501   T = 1. E — 3
      IF (RAL — T) 26, 26, 40
```

```
26     IALFA = 1
       SUM = 0.
       DO 60 J = 1, N
60     SUM = SUM + A (IALFA, J) + BG (J)
       RAL = SUM — B (IALFA)
       IF (K — 1) 37, 37, 70
70     CONTINUE
       DO 61 I = 2, K
       SUM = 0.
       DO 62 J = 1, N
62     SUM = SUM + A (I, J) * BG (J)
       R (I) = SUM — B (I)
       IF (RAL — R (I)) 63, 61, 61
63     IALFA = I
       RAL = R (I)
61     CONTINUE
       S = ABS (RAL + BG (NM1))
       T = 1. E— 3
       IF (S — T) 37, 37, 40
37     WRITE (3,202) (BG (I),.I = 1, NM1)
202    FORMAT (/15H LA SOLUCION ES// (8E15.8))
       WRITE (3,800) (IJ (I), I = 1    NM1)
800     FORMAT (/43H EL CONJUNTO DE INDICES J DE LA SOLUCION ES // (20I5))
   GO TO 903
C  SE APROVECHA EL TEOREMA DE INTERCAMBIO. SE CAMBIA INDICE IBETA POR
C  EL INDICE IALFA.
40     WRITE (3,212) (IJ (I), I = 1, MN1), IALFA
212    FORMAT (/54H EL CONJUNTO DE INDICES J Y EL INDICE SUSTITUYNTE SON 1/ (20I4))
       DO 64 I = 1, N
       BG (I) = A (IALFA, I)
       IP = IJ (I)
   DO   46 J = 1, N
64     AG (J, I) = A (IP, J)
       CALL GAUSS (N, AG, BG, MI)
       BG (NM1) = 0.
       IBETA = 1
       DO 65 I = 2, NM1
       S = BG (IBETA) / TH (IBETA)
       T = BG (I) / TH (I)
       IF( S — T) 66, 65, 65
66     IBETA = I
65     CONTINUE
       IPROV = IJ (IBETA)
       IJ (IBETA) = IALFA
       WRITE (3,203) (IJ (I), I = 1, NM1), IPROV
203    FORMAT (/61H EL CONJUNTO DE INDICES JOTA PRIMA Y EL INDICE SUSTITUI 1DO SON/
       (20I4))
       L = 1
       DO 67 I = 2, NM1
       IF (IJ (L) — IJ (I)) 67, 67, 68
68     L = I
67     CONTINUE
       IF (IJ (L) — K) 15, 15, 69
69     WRITE (3,250)
250    FORMAT (/69H USTED HA FRACASADO NUEVAMENTE, EL CONJUNTO DE RESTRIC
       1CIONES ES VACIO)
       GO TO 903
       END
```