

# RELAÇÃO ENTRE A HOMOGENEIDADE DE RESÍDUOS E VARIÁVEIS DENDROMÉTRICAS NA MODELAGEM DE BIOMASSA

## RELATIONSHIP BETWEEN HOMOGENEITY RESIDUALS AND VARIABLES DENDROMETRICS IN MODELING OF BIOMASS

Antonio Pedro Fragoso Woycikievicz<sup>1</sup>, Alexandre Behling<sup>2</sup>, Henrique Soares Koehler<sup>3</sup>, Afonso Figueiredo Filho<sup>4</sup>, Leon Lucas Mierzva<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil – antoniof.w@gmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil – alexandre.behling@yahoo.com.br

<sup>3</sup>Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, – koehler@ufpr.br

<sup>4</sup>Universidade Estadual do Centro-Oeste, Irati, Paraná, Brasil – afigfilho@gmail.com

<sup>5</sup>Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil – leonlucasmierzva@gmail.com

### RESUMO

Um dos problemas ocorrentes na modelagem da biomassa é a heteroscedasticidade dos resíduos, ocasionada de devido ao aumento da variância da biomassa total e seus componentes, relacionado ao aumento do tamanho das árvores, comprometendo assim as estimativas geradas que são base para avaliação das estratégias de manejo. O objetivo foi modelar a dependência da variância dos resíduos em função das variáveis diâmetro à altura do peito ( $d$ ), altura total ( $h$ ) e a variável combinada  $d^2h$ , para modelos de biomassa total e seus componentes. Os dados são oriundos de 670 árvores da espécie *Acacia mearnsii*, de povoamentos no estado do Rio Grande do Sul, Brasil, com idade variando de 1 a 10,75 anos, em que foram mensuradas a biomassa do fuste e da copa, o diâmetro à altura do peito ( $d$ ) e a altura total ( $h$ ). Foram ajustados modelos para a biomassa total e seus componentes (copa e fuste), por grupo de idade variando de jovem à madura, avaliando a dependência dos resíduos em função da variável  $d$  e  $h$ , além da combinada  $d^2h$ , tendo a heterocedasticidade constatada por meio do teste de White. Para a correção da heterocedasticidade foram aplicadas funções de peso para cada modelo em função das próprias variáveis independentes. O modelo de Spurr obteve o melhor desempenho para o componente de copa, biomassa total e componentes do fuste para os grupos 1, 2 e 3, tendo o modelo de Shumacher-Hall para os demais componentes e respectivos grupos. A biomassa da copa foi o componente com maior variabilidade, em que a variância depende do tamanho da árvore, em todas as idades da floresta. A modelagem da variância dos resíduos por meio das funções de peso se mostrou eficiente na correção da heterocedasticidade e na obtenção de estimadores mais consistentes e confiáveis.

**PALAVRAS-CHAVE:** Heteroscedasticidade, biomassa, resíduos, *Acacia mearnsii*

### ABSTRACT

One of the problems that occurs when modeling biomass is the heteroscedasticity of the residues, caused by the increase in the variance of total biomass and its components, related to the increase in tree size, thus compromising the estimates generated, which are the basis for evaluating management strategies. The objective was to model the dependence of the variance of the residues on the variables diameter at breast height ( $d$ ), total height ( $h$ ) and the combined variable  $d^2h$ , for models of total biomass and its components. The data is from 670 trees of the species *Acacia mearnsii*, sampled in commercial stands from Rio Grande do Sul, Brazil, with 1 to 10.75 years old. It was measured the crown and stem biomass, diameter at 1.30 aboveground ( $d$ ) and total height ( $h$ ). It was fitted Spurr and Schumacher-Hall models for total biomass and its components (crown and stem). It was evaluated the residuals of the biomass equations and its relation with  $d$ ,  $h$  and combined variable  $d^2h$ . The homogeneity of the residuals was tested by White's test. Aiming to accommodate the correction of heteroscedasticity on equations fitting, it was deriving a weight function using structure of the variance. The crown biomass was the component with more variability and the variance of the residuals depends of the tree size. The modeling of residuals, using the structure of variance, is efficient to accommodate the heteroscedasticity on biomass fitting. This procedure is important to obtaining efficient estimators on biomass equations.

**KEYWORDS:** heteroscedasticity, biomass, residuals, *Acacia mearnsii*

## INTRODUÇÃO

Os resíduos heterogêneos são, de certa maneira, um problema comum na modelagem da biomassa e seus componentes, como já evidenciado por diversos pesquisadores da área florestal (PARRESOL, 1999; ZENG et al., 2011; ZHAO et al., 2015; WANG et al., 2018). Tanto em florestas nativas ou plantadas, os resíduos gerados por meio do processo de regressão apresentam como característica a presença de heterocedasticidade, como Trautenmüller (2021) o evidenciou em florestas nativas, assim como Nhaduco (2021) em povoamentos de Pinus.

Greene (2008) destaca que a heteroscedasticidade não elimina as propriedades de consistência dos estimadores de mínimos quadrados, porém, deixam de ter variância mínima, não sendo assim eficientes. Gujarati e Porter (2011) reiteram a importância de se obter a homocedasticidade das variâncias, pois está diretamente associada à validação das hipóteses testadas.

Harvey (1976) e Judge et al. (1988) demonstraram que a aplicação da regressão ponderada produz estimadores consistentes e eficientes, podendo ser uma solução para os casos em que a variância dos erros não é constante. Portanto, a obtenção de pesos para modelar a variância dos resíduos é uma tarefa tão importante quanto o ajuste de modelos de regressão. Ao mesmo tempo, conhecer como as variáveis independentes contribuem para a heterocedasticidade dos resíduos é algo que também denota atenção.

Visto das evidências, faça-se as seguintes hipóteses: - Como se dá a evolução da heteroscedasticidade dos resíduos para a biomassa total e seus componentes para florestas ao longo da idade? - Qual é a relação da variância dos resíduos com as variáveis  $d$ ,  $h$  ou  $d^2h$ ?

Assim, objetivou-se com o estudo modelar a dependência da variância dos resíduos em função das variáveis diâmetro à altura do peito ( $d$ ), altura total ( $h$ ) e a variável combinada  $d^2h$ , para modelos de biomassa total e seus componentes em um povoamento de acácia-negra.

## MATERIAL E MÉTODOS

### Origem dos dados

Os dados são oriundos de povoamento de acácia negra (*Acacia mearnsii* De Wild) localizados nas regiões dos municípios de Cristal, Encruzilhada do Sul e Piratini, estado do Rio Grande do Sul, Brasil, com idades variando de 1 a 10,75 anos (Tabela 1).

**Tabela 1.** Coordenadas centrais das unidades amostrais instaladas em povoamentos de acácia negra no estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

Região	I	S	O
Cristal	1,75	30°58'23,8"	52°23'46,7"
	2,75	30°58'26,7"	52°25'14,1"
	5	30°50'49,1"	52°03'06,8"
	10,08	31°07'26,1"	52°05'10,8"
Encruzilhada do Sul	1,83	30°29'54,6"	52°38'33,5"
	3,08	30°53'16,1"	52°23'33,7"
	5,75	31°05'23,7"	53°04'05,7"
	10,75	30°27'35,8"	52°36'23,7"
Piratini	1	32°16'09,6"	53°18'59,3"
	2,33	31°26'25,1"	52°59'35,9"
	5,25	31°21'05,4"	52°56'45,3"
	9,83	31°24'46,5"	52°57'26,7"

Em que: I é a idade do povoamento, em anos, S é a coordenada sul e O é a coordenada oeste.

Em cada povoamento foram instaladas 4 parcelas com 5 m de raio (78,54 m<sup>2</sup>), na qual todas as árvores foram derrubadas e mensuradas as variáveis: diâmetro à altura do peito ( $d$ ) e altura total ( $h$ ), biomassa do fuste ( $y_f$ ) e da copa ( $y_c$ ). A biomassa total ( $y_{Total}$ ) foi definida com a soma da biomassa dos componentes  $y_f$  e  $y_c$ . Para a obtenção das variáveis mencionadas foram instaladas 48 parcelas e mensuradas 670 árvores.

A variável  $d$  foi mensurada utilizando uma fita dendrométrica e a altura total com uma trena. A mensuração da biomassa foi realizada para o componente do fuste (madeira do fuste + casca) e da copa (galhos vivos e mortos, folhas, flores e frutos). Para cada árvore, esses componentes foram separados e pesados para a determinação da biomassa úmida com balança digital (*Portable Electronic Scale*) com precisão de 5 g.

Para a determinação da biomassa de copa e do fuste foram retiradas amostras e imediatamente tomadas suas massas utilizando uma balança digital (*Hoyle*) com precisão de 1 g. As amostras da copa foram de aproximadamente 1.500 gramas e tomadas ao longo da copa da árvore nas posições 0%, 25%, 50%, 75% e 95% em relação ao comprimento total da copa (distância do primeiro galho, independentemente de estar vivo ou morto, até o ápice da copa). Para o fuste foram retirados 5 discos de 2 centímetros de espessura nas posições: 0%, 25%, 50%, 75% e 95% em relação à altura total.

As amostras foram secas em estufa de circulação e renovação de ar a 100°C e após a constatação de massa

constante, por meio de sucessivas tomadas de massas, o material foi pesado com uma balança digital de precisão de 1 g. A biomassa seca foi obtida conforme [1].

$$B_m = \frac{MU_{mi} * MS_{mi}}{MUA_{mi}} \quad (1)$$

Em que:  $B_m$  é biomassa seca do  $m^{th}$  componente, fuste ou copa, em kg, para a  $t^{th}$  observação;  $MU_{mi}$  é a massa fresca do  $m^{th}$  componente, fuste ou copa, em kg, para a  $t^{th}$  observação;  $MS_i$  = massa seca da amostra do  $m^{th}$  componente, do fuste ou da copa, em kg, para a  $t^{th}$  observação;  $MUA_i$  = massa fresca da amostra do  $m^{th}$  componente, do fuste ou da copa, em kg, para a  $t^{th}$  observação.

### Modelagem da Biomassa

A alocação da biomassa nos componentes varia de acordo com a idade do povoamento, ou seja, quanto maior for a idade do povoamento, maior será a proporção de biomassa do fuste em relação a biomassa total e, ainda, essa proporção é afetada nas classes de diâmetro e de alturas (TRAUTENMÜLLER et al., 2021).

Consequentemente deve-se separar em estratos tais composições nas diferentes idades. Considerando-se que as idades variam de 1 a 10,75 anos, a melhor divisão desses estratos não deveria incluir tamanhos de amplitude maior que dois anos, porque, dessa maneira, não seriam evidenciados os efeitos de tais proporções. Valendo-se dessas argumentações foram, consequentemente, identificados cinco estratos conforme descrito na tabela 2.

**Tabela 2.** Agrupamento dos dados em função da idade e maturidade dos povoamentos de acácia-negra no estado do Rio Grande do Sul

Grupo	Idade do povoamento (anos)	Idade do povoamento (qualitativa)	Número de Indivíduos (N)
1	1	Muito jovem	69
2	1,75 – 1,83	Jovem	115
3	2,33 – 3,08	Média-inicial	163
4	5 – 5,75	Média-avançada	153
5	9,83 – 10,75	Madura	170

Os modelos de Schumacher-Hall (1933) -  $\hat{y}_m = \beta_1 d^{\beta_2} h^{\beta_3} + \varepsilon_m$  e Spurr (1952) -  $\hat{y}_m = \beta_1 (d^2 h)^{\beta_2} + \varepsilon_m$  foram selecionados para ajuste da biomassa total e seus respectivos componentes (copa e fuste).

A avaliação dos modelos foi realizada com base no coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$ ) e coeficiente

de variação ( $CV$ ), conforme concepções apresentadas em Steel et al. (1996) e Greene (2008). Os modelos foram ajustados por *estimated generalized nonlinear least squares*, com definição dos estimadores apresentados em Greene (2008). Foi utilizado para o processamento dos dados o *software SAS Studio Demand for Academics*.

### Avaliação e modelagem da heterocedasticidade dos resíduos

O teste de White (1980) foi aplicado para testar a hipótese da homogeneidade dos resíduos em cada equação, com 95% de probabilidade. Para os casos em que a hipótese foi rejeitada, foram obtidos pesos por meio da estrutura da variância, seguido do novo ajuste da equação e aplicação do teste de White. Adicionalmente, foram construídos gráficos de dispersão dos resíduos ( $y_{m_t} - \hat{y}_{m_t}$ ) em função das variáveis  $d$ ,  $h$  e  $d^2 h$ .

Parresol (1993) destaca que diversas vezes a variância dos resíduos tem relacionamento fundamental com uma ou mais variáveis do modelo. Logo, conforme demonstra Parresol (2001), pode-se obter funções de peso em função das próprias variáveis independentes utilizadas no modelo de biomassa. Portanto, nesse caso para cada  $\sigma_t^2$  de um modelo, o peso é modelado por uma função exponencial das variáveis independentes incluídas no modelo, que são multiplicadas pelo fator de escala de  $\sigma^2$ :

$$E[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2 = \sigma^2 e^{(g_t \theta)} \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

Em que:  $g_t' = [g_{t1}, g_{t2}, \dots, g_{tP}]$  é um vetor ( $1 \cdot P$ ), que contém  $t^{th}$  observações das variáveis independentes, sabendo que  $g_s$  pode ser uma função similar ao modelo utilizado para modelar a biomassa.

A matriz de pesos pode ser escrita como:

$$\sigma^2 \Psi(\theta) = \sigma^2 \begin{bmatrix} e^{(g_1 \theta)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(g_2 \theta)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{(g_t \theta)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Assim, o vetor  $\theta$  é desconhecido, porém, de acordo com Harvey (1976), pode-se demonstrar que  $\theta$  é estimado de forma satisfatória aplicando-se uma regressão de mínimos quadrados ordinários. Logo:

$$\ln \varepsilon_t^2 = \ln \sigma^2 + g_t \theta + v_t \quad (4)$$

Onde:  $v_t$  é o erro associado ao modelo proposto,  $\theta$  são os coeficientes para obtenção a posteriori dos pesos e  $\sigma^2$  é a escala.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na tabela 3 estão descritos modelos que obtiveram o melhor desempenho de acordo com as estatísticas utilizadas ( $R^2$  e CV) para a Biomassa total e seus componentes em cada respectivo grupo, juntamente com o resultado do Teste de White para avaliação da homogeneidade dos resíduos.

**Tabela 3.** Equações ajustadas para a biomassa total e seus componentes e respectivas estatística de avaliação

Grupos	Modelo	$R^2$	CV	White
1	$\hat{y}_c = Spurr$	69,22%	22,11%	3,03 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_f = Spurr$	83,98%	16,13%	10,01 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_{Total} = Spurr$	81,19%	16,86%	2,05 <sup>ns</sup>
2	$\hat{y}_c = Spurr$	64,07%	31,51%	1,71 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_f = Spurr$	93,01%	12,39%	20,01*
	$\hat{y}_{Total} = Spurr$	89,32%	15,24%	15,02*
3	$\hat{y}_c = Spurr$	89,81%	24,85%	42,03*
	$\hat{y}_f = Spurr$	95,41%	13,16%	56,05*
	$\hat{y}_{Total} = Spurr$	96,06%	12,80%	46,52*
4	$\hat{y}_c = Spurr$	80,86%	29,46%	15,88*
	$\hat{y}_f = Shumacher - Hall$	95,22%	13,34%	17,04*
	$\hat{y}_{Total} = Shumacher - Hall$	95,50%	12,97%	22,04*
5	$\hat{y}_c = Spurr$	84,32%	36,78%	30,63*
	$\hat{y}_f = Shumacher - Hall$	95,80%	13,30%	36,69*
	$\hat{y}_{Total} = Shumacher - Hall$	95,98%	13,70%	54,55*

O modelo de Spurr obteve o melhor desempenho para o componente de copa em todos os grupos avaliados, como também para a biomassa total e do componente fuste para os grupos 1, 2 e 3, tendo o modelo de Shumacher-Hall o melhor desempenho para os componentes de biomassa total e do fuste para os grupos 4 e 5, ou seja, para as idades mais avançadas.

O teste de White revelou que para alguns grupos os resíduos não possuem variância constante. Para contornar este problema, optou-se por derivar pesos e ajustar esses modelos de maneira ponderada. Para os grupos 1 ( $y_c: \hat{\sigma}^2 = 1; y_f: \hat{\sigma}^2 = 1; y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = 1$ ) e o componente

da biomassa de copa do grupo 2 optou-se por utilizar o peso igual a 1, pois os resíduos apresentaram-se homogêneos. Para os demais componentes foram obtidas as funções de peso, descritas na tabela 4.

**Tabela 4 - Funções de Peso para modelagem da variância dos resíduos**

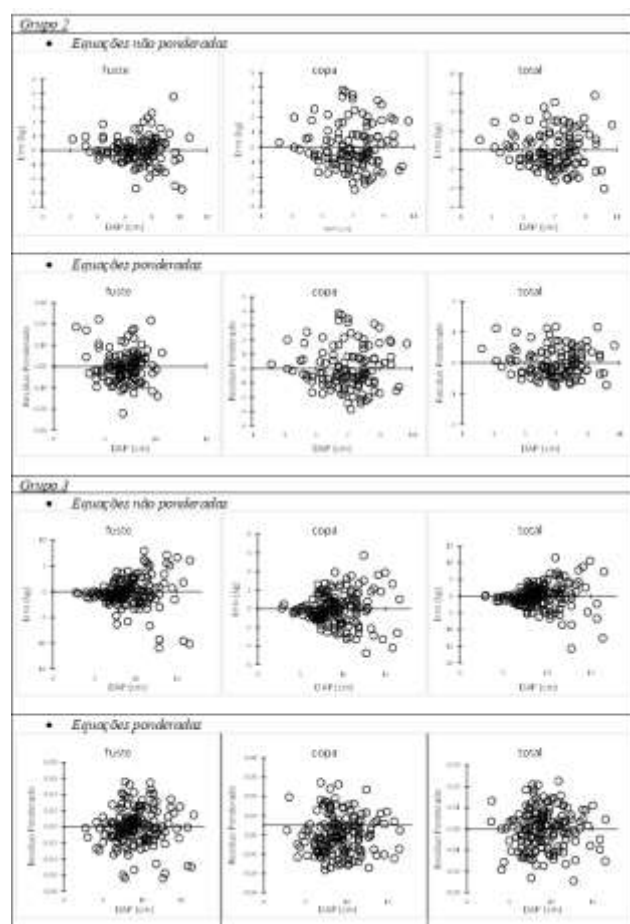
Grupo	Função de peso
2	$y_c: \hat{\sigma}^2 = 1$
	$y_f: \hat{\sigma}^2 = (d^2 h)^{0,856511}$
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = (d^2 h)^{0,485465}$
3	$y_c: \hat{\sigma}^2 = (d^2 h)^{1,264866}$
	$y_f: \hat{\sigma}^2 = (d^2 h)^{1,334049}$
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = (d^2 h)^{1,670747}$
4	$y_c: \hat{\sigma}^2 = (d^2 h)^{0,945054}$
	$y_f: \hat{\sigma}^2 = d^{4,002528} h^{-0,716350}$
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = d^{3,539289} h^{0,052788}$
5	$y_c: \hat{\sigma}^2 = (d^2 h)^{1,236776}$
	$y_f: \hat{\sigma}^2 = d^{4,514350} h^{-0,595380}$
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = d^{4,786551} h^{-0,249140}$

Com as funções de peso as equações ponderadas tiveram as estatísticas de desempenho e teste de White recalculado (Tabela 5), onde é possível constar que para todas as equações foi aceita a hipótese de nulidade, evidenciando a correção da heterocedasticidade, juntamente a melhora das estatísticas de desempenho.

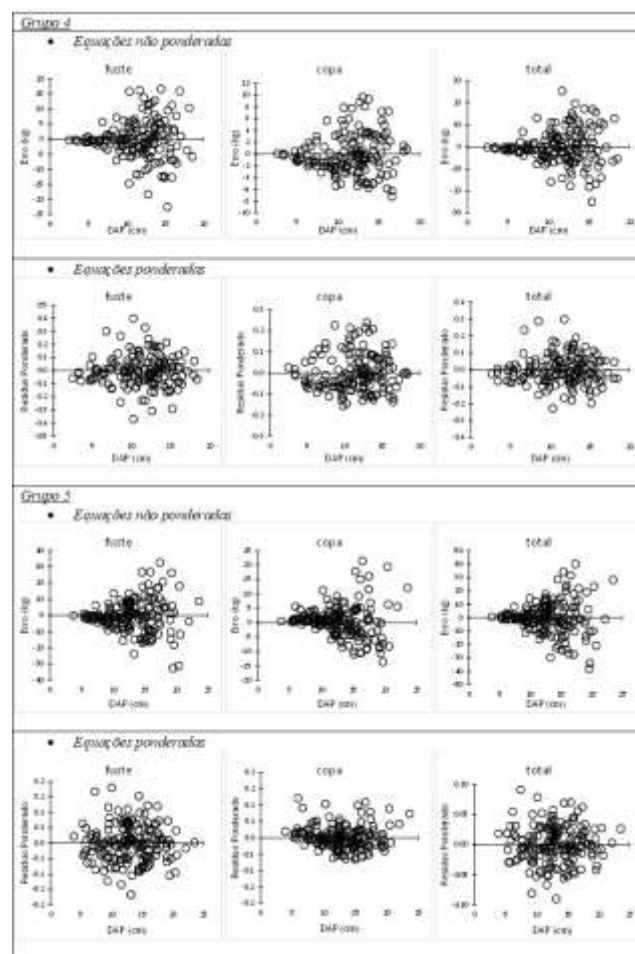
**Tabela 5.** Estatística de avaliação das equações ponderadas

Grupo	Componente Biomassa	$R^2$	CV	White
2	$\hat{y}_f$	92,94%	12,45%	13,02 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_{Total}$	89,28%	15,27%	4,84 <sup>ns</sup>
3	$\hat{y}_c$	89,80%	24,86%	1,38 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_f$	95,24%	13,39%	6,86 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_{Total}$	95,94%	12,99%	1,67 <sup>ns</sup>
4	$\hat{y}_c$	80,70%	29,58%	6,97 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_f$	95,19%	13,34%	6,69 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_{Total}$	95,43%	13,58%	6,04 <sup>ns</sup>
5	$\hat{y}_c$	82,89%	38,42%	4,67 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_f$	95,73%	13,41%	8,58 <sup>ns</sup>
	$\hat{y}_{Total}$	95,95%	13,75%	4,84 <sup>ns</sup>

Além da alteração no resultado da aceitação do teste de White, ambas as estatísticas de avaliação de desempenho dos modelos obtiveram ligeira melhora nos índices. Nas figuras 1 e 2 são apresentados os gráficos de resíduos em função diâmetro e é possível a uniformidade na distribuição dos resíduos oriundos das equações ponderadas em relação ao ajuste sem aplicação das funções de peso.



**Figura 1.** Resíduos para equações de biomassa de fuste, copa e total não ponderadas e ponderadas para árvores da espécie acácia-negra para os grupos 2 e 3



**Figura 2.** Resíduos para equações de biomassa de fuste, copa e total não ponderadas e ponderadas para árvores da espécie acácia-negra para os grupos 4 e 5

Os resíduos com variância inconstante para biomassa são reportados por vários autores, entre eles: Sanquetta et al. (2015) e Zhao et al. (2015), Trautenmüller et al. (2021) e Nhaduco (2021). Esse resultado não é referente ao problema de amostragem, tão pouco, dos modelos utilizados, mas sim é uma resposta biológica. Árvores com diâmetros pequenos possuem uma menor variabilidade da biomassa quando comparada com árvores de diâmetros grandes.

Na idade mais jovem da floresta (grupo 1) os resíduos foram homogêneos. À medida que foram realizadas amostragens em idades mais avançadas (grupos 2, 3, 4 e 5) a dispersão dos resíduos aumentou em função das variáveis independentes nos modelos de maneira proporcional, de tal modo a obter uma relação de proporcionalidade entre a média e variância. Assim, determinou-se que conforme o avanço da idade da floresta, maior é a heteroscedasticidade dos resíduos.

Trautenmüller et al. (2021) e Wang et al. (2018) aplicaram funções de peso para a variância na modelagem para a estimativa da biomassa e seus componentes em

florestas nativas no Brasil e em plantios de *Betula platyphylla* Suk. na China. Ambos os autores encontram resultados mais acurados nas estimativas da biomassa e como o resultado obtido neste trabalho a correção da heterocedasticidade dos resíduos.

Wang et al. (2018) acrescentam que quase sempre vão aparecer problemas de heterocedasticidade em modelos para a estimativa da biomassa, no entanto o uso das funções de ponderação produziu uma maior precisão nos intervalos de predição.

O ajuste dos modelos de Spurr e Schumacher-Hall também permitiu a avaliação da dependência da variância residual em função das variáveis  $d$ ,  $h$  e  $d^2h$ .

A biomassa da copa foi o componente com maior variabilidade, o que pode ser constatado por meio do coeficiente de determinação e variação apresentado na tabela 3. Logo, isso também afetou a variabilidade dos expoentes das funções de peso, os quais variaram em torno de 25% (do maior coeficiente para o menor). Isso também revela que a variância da copa depende do tamanho da árvore, em todas as idades da floresta.

Cubas et al. (2016) e Urbano et al. (2008) na modelagem da biomassa para povoamentos de Pinus e Bracinga, respectivamente, também encontraram no componente da copa maior variabilidade que os demais componentes. Urbano et al (2008) também corroboram a informação da maior variação em idade mais maduras do povoamento.

Para as equações de copa, o expoente da função de peso  $\hat{\beta}$ , da função  $\hat{\sigma}^2 = (d^2h)^\beta$ , variou de 0,94 a 1,26, revelando um comportamento estável nas diferentes idades. Quando substituído o modelo da função de peso foi observada uma maior variação nos coeficientes  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$  do modelo  $\hat{\sigma}^2 = d^{\beta_1} h^{\beta_2}$ , na qual variaram em torno de 89% e 59% (do maior coeficiente para o menor), respectivamente.

Ressalta-se que não foi observada uma relação com a idade e que a relação da variância residual com as variáveis  $d$  e  $h$  ocorre de maneira inversamente proporcional. Ao modelar a variância residual em função de  $d^2h$  ocorreu um confundimento devido a relação inversa com as variáveis  $d$  e  $h$ , o que pode explicar seu comportamento mais estável nas diferentes idades da floresta.

Para as funções de fuste, os expoentes da função de peso  $\hat{\sigma}^2 = d^{\beta_1} h^{\beta_2}$  ajustados para todos os grupos também foram dependentes da idade da floresta, na qual houve um aumento dos valores de ambos os coeficientes, porém com relação positiva para  $\hat{\beta}_1$  em relação a idade da floresta e negativa para  $\hat{\beta}_2$ .

No caso do componente fuste, expoente da função de peso  $\hat{\sigma}^2 = (d^2h)^\beta$  (ajustado para todos os grupos para obtenção das relações) revelou ser dependente da idade da floresta, na qual foi observado um aumento no seu valor para as florestas maduras, diferentemente do observado para o componente da copa.

Os coeficientes  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$  do modelo  $\hat{\sigma}^2 = d^{\beta_1} h^{\beta_2}$  variaram em torno de 99% e 52% (do maior coeficiente para o menor), respectivamente. Logo, a variância residual da biomassa do fuste é mais afetada em função da dimensão do fuste do que quando comparado com a altura. Assim como observado para a biomassa da copa, ao modelar a variância residual em função da variável combinada  $d^2h$ , seu comportamento refere-se a média das relações da variância residual com as variáveis  $d$  e  $h$ .

Para a biomassa total, o comportamento de dependência maior da variável  $d$  em relação a  $h$  é semelhante ao encontrado para o componente fuste, em que os coeficientes  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$  do modelo  $\hat{\sigma}^2 = d^{\beta_1} h^{\beta_2}$  variaram em torno de 85% e 99% (do maior coeficiente para o menor), respectivamente.

Tal relação de dependência para a biomassa total pode ser explicada devido ao fato de florestas em idades média-avançada e madura a proporção de biomassa do fuste é maior do que a de copa, logo, a variância residual para a biomassa total também é maior.

Nos grupos 1, 2 e 3 (grupos de povoamentos mais jovens) foi observado que gradativamente os erros (fuste, copa e total) ficavam mais heterogêneos. Em diâmetros menores os resíduos eram mais homogêneos, enquanto para diâmetros maiores os resíduos eram heterogêneos. Após a aplicação das ponderações nas equações foi possível obter resíduos homogêneos. Isso revela que a modelagem de estrutura da variância também é uma etapa importante no estabelecimento das equações de biomassa, especialmente ao fazê-la considerando como variáveis independentes  $d$  e  $h$ , devido as distintas relações da variância residual dos componentes com essas variáveis.

Nos demais grupos, com as idades mais avançadas, os erros foram mais heterogêneos, aumentando a variabilidade dos resíduos em função do diâmetro, apresentando expoentes com valores mais altos, indicando que para florestas mais velhas a heterocedasticidade dos resíduos é maior. Nas florestas maduras estão as árvores com maiores diâmetros, o que traz também maior variabilidade que em árvores menores, o que também é constatado por Trautenmüller, et al (2021) nas árvores de maior diâmetro em florestas nativas.

## CONCLUSÕES

A heteroscedasticidade da biomassa do fuste e biomassa total é observada em todas as idades, apresentando relação positiva com a idade, ou seja, maior para as florestas mais velhas.

A variância residual da biomassa do fuste e total é mais afetada em função do diâmetro do fuste do que quando comparado com a altura.

Para cada componente da biomassa a variância residual é relacionada de uma forma com as variáveis  $d$  e  $h$ , e com proporções diferenciadas (expoentes), o que não é revelado por meio da variável combinada  $d^2h$ .

A modelagem de estrutura da variância é uma etapa importante no estabelecimento das equações de biomassa, considerando como variáveis independentes  $d$  e  $h$ , devido as distintas relações da variância residual dos componentes com essas variáveis, e corrigindo a heteroscedasticidade, obtendo assim estimadores mais consistentes e confiáveis.

## REFERÊNCIAS

- CUBAS, R *et al.* Modelagem da biomassa da regeneração natural em plantio de *Pinus*. **Pesquisa Florestal Brasileira**, v. 36, n. 87, p. 303-310, 2016
- GREENE, W.H. **Econometric analysis**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2008. 1178p.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. **Econometria básica**. 5ª ed. Editora AMGH, Porto Alegre, 2011, 924p
- HARVEY, A.C. Estimating regression models with multiplicative heteroscedasticity. **Econometrica**, v. 44, p. 461-465, 1976.
- JUDGE, G.G *et al.* **Introduction to the theory and practice of econometrics**. New York: John Wiley and Sons, 1988. 1024p.
- NHADUCO, O. P. E. *et al.* Sistema de equações de biomassa de *Pinus* spp. no sul do Paraná. **Scientia Forestalis**, v. 49, p. 1-20, 2021.
- PARRESOL, B.R. Additivity of nonlinear biomass equations. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 31, p. 865-878, 2001.
- PARRESOL, B.R. Assessing tree and stand biomass: a review with examples and critical comparisons. **Forest Science**, v. 45, p. 573-593, 1999.
- PARRESOL, B.R. Modeling multiplicative error variance: an example predicting tree diameter from stump dimensions in baldcypress. **Forest Science**, v. 39, n. 4, p. 670-679, 1993.
- SANQUETTA, C.R *et al.* Simultaneous estimation as alternative to independent modeling of tree biomass. **Annals of Forest Science**, v. 72, n. 8, p. 1099-1112, 2015.
- SCHUMACHER, F.X.; HALL, F.S Logarithmic expression of timber-tree volume. **Journal of Agricultural Research**, v. 47, n. 9, p. 719-734, 1933.
- SPURR, S.H. **Forest inventory**. New York: The Ronald Press Company, 1952. 476 p.
- STEEL, R.G.D.; TORRIE, J.H.; DICKY, D.A. Principles and procedures of statistics: a biometrical approach. 3 rd. New York: McGraw-Hill, 1996. 672p.
- TRAUTENMÜLLER, J. W *et al.* Regression estimators for aboveground biomass and its constituent parts of trees in native southern Brazilian forests. **Ecological Indicators**, v. 130, p. 1-10, 2021.
- URBANO, E *et al.* Modelagem da biomassa aérea em bracatingais nativos da região metropolitana de Curitiba. **Floresta**, v. 38, n. 2, p. 361-372, 2008
- WANG, X *et al.* Additive tree biomass equations for *Betula platyphylla* Suk. plantations in Northeast China. **Annals of Forest Science**, v.75, 60, 2018.
- WHITE, H. A heteroskedasticity consistent covariance matrix estimator and a direct test of heteroskedasticity. **Econometria**, v. 48, pp. 817-838, 1980.
- ZENG, W.S *et al.* Using the dummy variable model approach to construct compatible single-tree biomass equations at different scales – a case study for masson pine (*Pinus massoniana*) in southern China. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 41, p. 1547-1554, 2011.
- ZHAO, D *et al.* Additive tree biomass equations for mid-rotation loblolly pine plantations. **Forest Science**, v. 61, n. 4, p. 613- 623, 2015.