

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS ENVOLVIDOS NA REALIZAÇÃO DO ITRS

Mathematical fundamental involved in the ITRS realization

JOÃO FRANCISCO GALERA MONICO

galera@pesquisador.cnpq.br

Departamento de Cartografia

FCT UNESP - Campus de Presidente Prudente/SP

RESUMO

Os fundamentos matemáticos básicos envolvidos atualmente na realização de referenciais de alta precisão, contendo soluções VLBI, SLR, GPS e DORIS são apresentados em detalhes. Cada solução individual apresenta certas deficiências em produzir um referencial global de alta precisão. Mas a combinação delas, juntamente com a introdução da condição de uma rede com evolução temporal sem rotação residual global (NNR), proporciona uma solução que reflete a precisão atual das tecnologias espaciais disponíveis para a Geodésia na determinação de posição e velocidade de estações sobre a crosta terrestre. Enquanto a origem do sistema fica estabelecida a partir de soluções SLR, a escala fica inserida a partir de soluções SLR e VLBI. A orientação e sua evolução temporal são introduzidas via injunção internas, atendendo as condições NNR.

ABSTRACT

The mathematical fundamentals involved in the realization of a high precision reference system, taking into account solutions from VLBI, SLR, GPS and DORIS are presented. Each individual solution has its own deficiencies in providing a global reference system. But combining all solutions together, and by the introduction of the no net rotation condition (NNR), a solution that reflects the nowadays precision of the available spatial techniques for the determination of position and velocity of stations located on the Earth crust is obtained. Whilst the origin is provided by SLR, the scale is introduced by SLR and VLBI. The orientation and its temporal evolution are introduced via internal constraints, in accordance with the NNR condition.

1. INTRODUÇÃO

A realização do ITRS (IERS (*International Earth Rotation Service and Reference System*) *Terrestrial Reference System*) envolve várias técnicas de posicionamento espacial (GPS, VLBI, SLR e DORIS) (ALTAMIMI, SILLARD e BOUCHER, 2002). Cada uma das soluções, envolvendo vários anos de observações, são combinadas de modo a produzir uma única solução. Nessa combinação, que trata da realização de um referencial cinemático, cada uma dessas tecnologias apresenta propriedades de interesse, bem como deficiências. A combinação resulta numa solução que pode ser considerada ótima. Uma extensa descrição sobre as várias realizações do ITRS e suas deficiências são apresentadas em MONICO, BAEZ e DREWES (2005). Por exemplo, o VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) é excelente para proporcionar a escala do referencial, mas não proporciona a origem, a qual advém do SLR (*Satellite Laser Range*). Por outro lado, nenhuma dessas tecnologias proporciona a orientação do referencial, a qual é introduzida a partir da condição NNR (*No-Net-Rotation*) (MONICO, 2005).

O objetivo deste trabalho é apresentar os fundamentos matemáticos gerais envolvidos na obtenção da solução individual de uma determinada tecnologia, a combinação de várias soluções envolvendo a mesma tecnologia (intra-solução) e a combinação de soluções independentes (inter-soluções).

2 SOLUÇÕES INDIVIDUAIS

Cada uma das soluções envolvidas numa determinada tecnologia que faz parte da realização do ITRS proporciona uma lista de coordenadas e velocidades numa referida época, acompanhada da respectiva MVC (Matriz Variância e Covariância), bem como de outras informações necessárias, em geral, no formato SINEX (*Solution and Software Independent Exchange Format*). Essas soluções, de preferência, devem ser livres de informações externas, o que proporciona deficiência de posto na solução. Logo, informações adicionais devem ser introduzidas na solução para eliminar essa deficiência.

Considerando um caso genérico de uma rede estática que apresente deficiência em origem, orientação e escala, tem-se que introduzir 7 injunções de *datum* ($H_x = 0$), as quais advém do espaço nulo da matriz A do ajustamento (GEMAEL, 1994) e coincidem com os elementos da transformação de Helmert (HEFLIN et al., 1992; MONICO, 1995), que para uma estação i qualquer são dados por:

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0^i & 0 & Z_0^i & -Y_0^i \\ 0 & 1 & 0 & Y_0^i & -Z_0^i & 0 & X_0^i \\ 0 & 0 & 1 & Z_0^i & Y_0^i & -X_0^i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} H_o^i \\ H_e^i \\ H_R^i \end{pmatrix}$$

com

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_e = \begin{pmatrix} X_0^i & Y_0^i & Z_0^i \end{pmatrix}, H_R = \begin{pmatrix} 0 & Z_0^i & -Y_0^i \\ -Z_0^i & 0 & X_0^i \\ Y_0^i & -X_0^i & 0 \end{pmatrix} \quad (01)$$

Na equação (01), todos os vértices que fazem parte da definição do *datum* da rede deverão ter suas coordenadas aproximadas (X_0^i, Y_0^i, Z_0^i) inseridas adequadamente na referida matriz. No caso apresentado, foi considerado um vértice genérico i . As sub-matrizes H_0 , H_e e H_R estão relacionadas, respectivamente, com a origem, escala e orientação do referencial. As coordenadas que compõem a sub-matriz H_R , visando atender a definição do IERS no que se refere a orientação do referencial (IERS CONVENTION 2003), devem coincidir com as coordenadas aproximadas sendo utilizadas.

No caso de uma solução individual do GPS, envolvendo, por exemplo, as estações IGS (*International GNSS (Global Navigation Satellite System) Service*), tem-se, em princípio, deficiência apenas em orientação. Nesse caso, além das equações de observações referentes à fase da onda portadora τ_f e a pseudodistância $-pr$ (MONICO 2000; SEEBER 2003), tem-se que introduzir as injunções referente a orientação da rede. Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned} v_{f/pr} &= Ax + l \\ 0 &= Cx \end{aligned} \quad (02)$$

sendo v o vetor ($n \times 1$) do resíduos das observações fase e pesudodistâncias; A a matriz Jacobiana ($n \times (u+iz)$); x o vetor ($(u+iz) \times 1$) das correções aos parâmetros aproximados (x^0) e l o vetor ($n \times 1$) das observações, subtraído do vetor das observações calculadas em função dos parâmetros aproximados. Nesse caso está se admitindo que u refere-se as coordenadas das estações (rede estática) e iz aos demais parâmetros sendo estimado no modelo (ambigüidades, parâmetros da atmosfera, etc). A segunda equação em (02) refere-se as injunções necessárias para o sistema apresentar solução. A matriz C , de ordem ($3 \times u$), corresponde ao espaço nulo de A e é dada por:

$$C = \begin{pmatrix} H_{R1} & H_{R2} & \dots & H_{Rm} \end{pmatrix} \quad (03)$$

sendo $u=3*m$ e m o número de estações. A condição envolvida na segunda equação de (02), sendo a matriz C dada por (03), é a de uma rede que não rotaciona (NNR) com respeito aos valores aproximados dos parâmetros ($x^0 \times x = 0$).

Para o VLBI, apenas informações de escala são obtidas a partir das equações de observação. Desta forma, na matriz C da equação (02) deve introduzir informações referente a origem e orientação. Neste caso, a matriz C é dada por:

$$C = \begin{pmatrix} H_{o1} & H_{o2} & \dots & H_{om} \\ H_{R1} & H_{R2} & \dots & H_{Rm} \end{pmatrix} \quad (04)$$

Na estrutura da matriz C da equação (04) assume-se que todos os vértices fizeram parte da definição da origem (H_o) e da orientação (H_R). Pode ocorrer que nem todos os vértices utilizados para a condição de origem (NNT – *No Net-Translation*) sejam os mesmos envolvidos na condição de orientação (NNR). Logo, quando isso vier a ocorrer, deve-se corrigir a estrutura da matriz C na equação (04). Assim, as matrizes correspondentes as estações que não fazem parte da condição devem ser zeradas. Da mesma forma que no caso anterior (equações 02 e 03), as sub-matrizes que compõem a matriz C em (04) introduz algumas condições na rede. O segundo conjunto é similar à condição NNR no GPS, enquanto que o primeiro diz respeito a condição NNT em relação aos valores aproximados dos parâmetros (MONICO, 2005).

A solução SLR apresenta deficiência apenas em orientação. Logo, a matriz C tem igual conteúdo ao apresentado na equação (03). Para o DORIS (*Doppler Orbitography and Radio positioning Integrated by Satellite*), a situação também pode ser considerada igual à do GPS.

Com essas informações, o sistema de equações (02) pode ser solucionado ao aplicar o Método dos Mínimos Quadrados (GEMAEL, 1994), quer seja na solução SLR, VLBI, GPS ou DORIS, numa época i . Logo, tem-se a seguinte solução (ANGERMANN et al., 2004):

$$x_i = (A^T PA + C^T C)^{-1} A^T Pl = (N_i + C^T C)^{-1} u_i \quad (05)$$

$$\text{com } u_i = A^T Pl_i.$$

Numa solução particular de uma determinada tecnologia abrangendo um determinado período, por exemplo, uma semana (x_s), envolvendo várias soluções x_i ($i=1,2,\dots,k$) diárias, e onde as velocidades das estações ainda podem ser considerada nulas, tem-se a seguinte solução:

$$x_s = (N_1 + N_2 + \dots + N_k + C^T C)^{-1} (u_1 + u_2 + \dots + u_k) = (N_s + C^T C)^{-1} u_s \quad (06)$$

$$\text{com } N_s = (N_1 + N_2 + \dots + N_k) \text{ e } u_s = (u_1 + u_2 + \dots + u_k).$$

Observe-se que cada equação normal individual, livre das injunções, deve ser conservada para ser usada nessa solução. Nesse tipo de combinação tem-se ainda o interesse em obter, simultaneamente, os parâmetros de transformação de Helmert de cada solução individual x_i com respeito a solução final de todo o período de coleta de dados (x_s), para avaliar a qualidade da mesma. Então, o modelo matemático para esse caso pode ser dado por:

$$\begin{pmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \\ \dots \\ v_{x_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & 0 & \dots & 0 & B_k & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ p_1 \\ \dots \\ p_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 - x_s^0 - B_1 p_1^0 \\ x_2 - x_s^0 - B_2 p_2^0 \\ \dots \\ x_k - x_s^0 - B_k p_k^0 \end{pmatrix} \quad (07)$$

sendo p_1, p_2, \dots, p_k composto pelos sete parâmetros de transformação entre cada solução individual (x_i) e a solução do período (x_s). Nessa equação, x_s^0 é o vetor das coordenadas aproximadas. A matriz B_i é dada por (similar à equação (01)):

$$B_i = \begin{pmatrix} H_1^T \\ H_2^T \\ \dots \\ H_m^T \end{pmatrix} \quad (08)$$

onde se está assumindo que todas as m estações foram determinadas em todas as k soluções individuais. Caso isso não ocorra, adaptações devem ser introduzidas, ou seja, a sub-matriz correspondente deve ser eliminada. Os elementos da matriz B são obtidos a partir dos valores aproximados das coordenadas, advindos das soluções individuais da equação (05). Dessa forma, tem-se o seguinte sistema de equações normais para ser solucionado:

$$\left(\begin{array}{cccccc} N_s + C^T C & N_1 B_1 & N_2 B_2 & N_3 B_3 & \dots & N_k B_k \\ B_1^T N_1 & B_1^T N_1 B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_2^T N_2 & 0 & B_2^T N_2 B_2 & 0 & \dots & 0 \\ B_3^T N_3 & 0 & 0 & B_3^T N_3 B_3 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ B_k^T N_k & 0 & 0 & \dots & 0 & B_k^T N_k B_k \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_s \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k N_j (x_j - x_s^0 - B_j p_j^0) \\ B_1^T N_1 (x_1 - x_s^0 - B_1 p_1^0) \\ B_2^T N_2 (x_2 - x_s^0 - B_2 p_2^0) \\ \dots \\ B_k^T N_k (x_k - x_s^0 - B_k p_k^0) \end{pmatrix} \quad (09)$$

É importante ressaltar que, nas combinações de soluções, os valores aproximados dos parâmetros devem ser sempre os mesmos.

A partir da estrutura da equação (09), o que se faz na prática é solucionar cada grupo individualmente, isto é:

$$\left(\begin{array}{cc} N_s + C^T C & N_i B_i \\ B_i^T N_i & B_i^T N_i B_i \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_s \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k N_j (x_j - x_s^0 - B_j p_j^0) \\ B_i^T N_i (x_i - x_s^0 - B_i p_i^0) \end{pmatrix} \quad (10)$$

para $i=1, \dots, k$. Observe que, novamente, a matriz normal de cada solução deve ser conservada.

Uma vez que se dispõe de uma longa série temporal, por exemplo, de várias semanas, de coordenadas e das respectivas MVC, pode-se agora estimar as coordenadas numa época específica t_0 , denominada $x(t_0)$, com as respectivas velocidades (constante) das estações, denominada \dot{x} . Para fins desse trabalho está se assumindo velocidade constante para todas as estações. Independente da técnica sendo utilizada, tem-se agora a seguinte estrutura para as equações de observação:

$$\begin{bmatrix} v_{x_1} \\ \dots \\ v_{x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & dt_s^1 I \\ \dots & \dots \\ I & dt_s^k I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \dot{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_s^i(t_1) - x^0(t_0) - dt_s^1 \dot{x}_0 \\ \dots \\ x_s^k(t_k) - x^0(t_0) - dt_s^k \dot{x}_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Observe que agora as coordenadas são tratadas como observações.

Nessa solução, visando atender a condição de NNR no que diz respeito a conservação do momento angular, deve-se introduzir, para um determinado número de estações (N_{Vor}), a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^{N_{Vor}} x^0(t_0) \times \dot{x}_i = 0 \quad (12)$$

A equação (12) define a taxa de variação (*rate*) em rotação (derivada da rotação) da realização do referencial terrestre. Ela representa a condição NNR sobre a crosta terrestre, que traduz na conservação do momento angular da rede. Sua aplicação deve ser efetuada com muito cuidado, devendo ser restrita a um determinado número de estações que representem a crosta terrestre. Quando se aplica essa condição para um determinado número de estações, elas devem ter uma distribuição ótima sobre toda a Terra e um longo período de observação. O comportamento geofísico das estações deve ser levado em consideração, evitando, por exemplo, que uma estação localizada num limite de placa listosférica, ou numa região sismica, faça parte dessa condição.

Ao aplicar o conceito da equação (12), o qual, conforme já dito, representa a conservação do momento angular da rede, a equação (11) passa a ser representada por:

$$\begin{bmatrix} v_{X_1} \\ v_{X_2} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & dt_s^1 I \\ \dots & I & dt_s^k I \\ 0 & C_{NNR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \dot{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_s^i(t_1) - x^0(t_0) - dt_s^1 \dot{x}_0 \\ \dots \\ x_s^k(t_k) - x^0(t_0) - dt_s^k \dot{x}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

A matriz C_{NNR} na equação (13) será do tipo da apresentada na equação (03) para as soluções GPS, SLR e DORIS e do tipo da equação (04) para o caso do VLBI. Detalhes de implementação podem ser encontrados em Monico (2005). Apenas as colunas correspondentes às velocidades das estações que participarão da condição NNR serão preenchidas com as devidas coordenadas. A equação normal final para o sistema de equações (13) é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc} \sum_{i=1}^k N_s^i + C^T C & \sum_{i=1}^k N_s^i dt_s^i \\ \sum_{i=1}^k N_s^i dt_s^i & \sum_{i=1}^k N_s^i dt_s^i + C_{NNR}^T C_{NNR} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k N_s^i (x_s^i(t_i) - x^0(t_0) - dt_s^i \dot{x}_0) \\ \sum_{i=1}^k dt_s^i N_{i=1}^k (x_s^i(t_i) - x^0(t_0) - dt_s^i \dot{x}_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Da mesma forma, como apresentado anteriormente, é interessante dispor dos parâmetros de transformação entre cada uma das soluções individuais e a final. Para o caso em questão, tem-se o seguinte modelo matemático:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \\ \dots \\ v_{x_k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & dt_s^1 I & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ I & dt_s^2 I & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & dt_s^k I & 0 & \dots & 0 & B_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \dot{x} \\ p_1 \\ \dots \\ p_k \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} x_1 - x^0(t_0) - dt_s^1 \dot{x}_0 - B_1 p_1^0 \\ x_2 - x^0(t_0) - dt_s^2 \dot{x}_0 - B_2 p_2^0 \\ \dots \\ x_k - x^0(t_0) - dt_s^k \dot{x}_0 - B_k p_k^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

que proporciona o seguinte sistema de equações normais para o caso de uma única transformação:

$$\begin{pmatrix}
 \sum_{i=1}^k N_s^i + C^T C & \sum_{i=1}^k N_s^i dt_s^i & N_s^1 B_1 & \dots & N_s^k B_k \\
 \sum_{i=1}^k N_s^i dt_s^i & \sum_{i=1}^k N_s^i (dt_s^i)^2 + C_{NNR}^T C_{NNR} & dt_s^1 B_1 & \dots & dt_s^k B_k \\
 N_s^1 B_1 & N_s^1 dt_s^1 B_1 & B_1^T N_s^1 B_1 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & 0 & \dots & B_k^T N_s^k B_k \\
 N_s^k B_k & N_s^k dt_s^k & 0 & \dots & B_k^T N_s^k B_k
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x(t_0) \\
 \dot{x} \\
 p_1 \\
 \dots \\
 p_k
 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}
 \sum_{i=1}^k N_s^i (x_i - x_0 - dt_s^i \dot{x}_0 - B_i p_i^0) \\
 \sum_{i=1}^k dt_s^i N_s^i (x_i - x_0 - dt_s^i \dot{x}_0 - B_i p_i^0) \\
 B_1^T N_1 (x_1 - x_0 - dt_s^1 \dot{x}_0 - B_1 p_1^0) \\
 \dots \\
 B_k^T N_s^k (x_k - x_0 - dt_s^k \dot{x}_0 - B_k p_k^0)
 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Resolvendo esse sistema obtém-se a solução individual de interesse.

3 INTRA-SOLUÇÃO

Supondo agora que diversos grupos proporcionaram para a mesma técnica, uma série de soluções envolvendo coordenadas e velocidade das mesmas estações, efetua-se a combinação da solução do vários grupos, dentro do que vem sendo chamado de intra-solução, obtendo-se $x(t_o)_{ia}$ e \dot{x}_{ia} com as respectivas MVCs. Da mesma forma que nos casos apresentados, o ideal é realizar a combinação em termos de equações normais de cada solução individual, de preferência, todas livres de informações que não sejam as advindas das próprias observações. Nesse caso, se a solução apresentar algum tipo de injunção, o ideal é que a mesma seja removida. Para remoção de injunções, veja por exemplo, Altamimi, Sillard and Boucher (2002). Na intra-solução, têm-se informações de coordenadas e velocidades das estações com as respectivas MVCs, as quais serão as observáveis nas equações de observação. Em geral, nem todas as estações de uma solução coincidem com as das outras. Mas se pode contornar esse problema, pois as soluções são combinadas a partir das equações normais. Desta forma, cada sistema de equações normais pode ser expandido via a inclusão adequada de zeros nas linhas e colunas correspondentes, organizando-o de modo que cada solução individual contenha as mesmas incógnitas. Então, o modelo de combinação, considerando k soluções diferentes, com as mesmas estações fazendo parte de cada solução, tendo as estimativas dos parâmetros de transformação simultâneo, é dado da seguinte forma (assume-se todas observações reduzidas à mesma época):

$$\begin{pmatrix} v_{x_1} \\ v_{\dot{x}_1} \\ \dots \\ v_{x_k} \\ v_{\dot{x}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & B_1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & B_k \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & B_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t_o)_{ia} \\ \dot{x}_{ia} \\ p_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dots \\ p_k \\ \dot{p}_k \end{pmatrix} - \\
 - \begin{pmatrix} x_1 - x(t_o)_ia^0 - B_1 p_1^0 \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_{ia}^0 - B_1 \dot{p}_1^0 \\ \dots \\ x_k - x(t_o)_ia^0 - B_k p_k^0 \\ \dot{x}_k - \dot{x}_{ia}^0 - B_k \dot{p}_k^0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Como está se assumindo que as equações normais livre de injunções externas estão disponíveis, a solução final da equação (17) dependerá do tipo de técnica sendo solucionada. Se for uma solução VLBI, informações externas sobre a origem (NNT) e orientação (NNR) devem comparecer, além da condição NNR para as velocidades. Procedimento similar, tal como apresentado anteriormente, deve comparecer para os outros tipos de soluções. A solução apresentada na equação (17) envolve uma transformação de 14 parâmetros, os quais correspondem aos 7 parâmetros da transformação de Helmert (p_i) e as suas taxas de variação \dot{p}_i (rate) (SAPUCCI e MONICO, 2000). Isso se deve agora pelo fato de se estar tratando de uma rede cinemática, cujas coordenadas variam com o tempo, ocorrendo o mesmo com os parâmetros de transformação. Para facilitar a apresentação, a equação normal de cada solução, advinda da equação (16) no que concerne a posição e velocidade, será representada por:

$$N_{ia} = \begin{pmatrix} N_x & N_{\dot{x}} \\ N_{\dot{x}} & N_{\ddot{x}} \end{pmatrix} \quad (18)$$

a qual deve ser entendida como livre das injunções. Isto é, os termos $C^T C$ e $C_{NNR}^T C_{NNR}$ não fazem parte das matrizes N_X e $N_{\dot{x}}$. Então, de uma forma geral,

considerando-se a solução final e a transformação para uma das soluções sendo combinada, a primeira por exemplo, tem-se:

$$\left(\begin{array}{cccc} \sum_{i=1}^{n_{ia}} N_x^i + C^T C & \sum_{i=1}^{n_a} N_{\dot{x}\dot{x}}^i & N_x^1 B_1 & 0 \\ \sum_{i=1}^{n_{ia}} N_{\dot{x}\dot{x}}^i & \sum_{i=1}^{n_a} N_{\dot{x}\dot{x}}^i + C_{NNR}^T C_{NNR} & 0 & N_{\dot{x}}^1 B_1 \\ H_1^T N_x^1 & 0 & B_1^T N_x^1 B_1 & 0 \\ 0 & B_1^T N_{\dot{x}}^1 & 0 & B_1^T N_{\dot{x}}^1 B_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x(t_o)_{ia} \\ \dot{x}_{ia} \\ p_1 \\ \dot{p}_1 \end{pmatrix} = \quad (19)$$

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n_{ia}} N_x^i (x_i - x(t_o)_{ia}^0 - B_i p_i^0) + N_{\dot{x}\dot{x}} (x_i - \dot{x}_{ia}^0 - B_i \dot{p}_i^0) \\ \sum_{i=1}^{n_{ia}} N_{\dot{x}\dot{x}} (x_i - \dot{x}_{ia}^0 - B_i \dot{p}_i^0) + N_{\dot{x}\dot{x}}^i (x_i - x(t_o)_{ia}^0 - B_i p_i^0) \\ B_1^T N_x^1 (x_1 - x(t_o)_{ia}^0 - B_1 p_1^0) + B_1^T N_{\dot{x}\dot{x}} (\dot{x}_1 - \dot{x}_{ia}^0 - B_1 \dot{p}_1^0) \\ B_1^T N_{\dot{x}\dot{x}} (x_i - x(t_o)_{ia}^0 - B_i p_i^0) + B_1^T N_{\dot{x}\dot{x}}^1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_{ia}^0 - B_1 \dot{p}_1^0) \end{array} \right)$$

Resta agora, para obter uma intra-solução de cada tecnologia, solucionar o sistema de equações. A solução final, além de coordenadas e respectiva velocidade das estações, envolve os 14 parâmetros de transformação de Helmert generalizada.

Essas soluções (GPS, VLBI, SLR, DORIS) devem agora ser combinadas para produzirem a chamada inter-solução.

4 INTER-SOLUÇÃO

Assumindo que se dispõe das várias soluções resultantes das intra-soluções (GPS, VLBI, SLR, DORIS), apresenta-se seguir a metodologia que vem sendo adotada para obter a solução final, ou seja, a combinação das soluções, e que deverá ser aplicada nas novas realizações do ITRS. Os vetores advindos de cada solução, na maioria dos casos não coincidirão com o de uma outra solução. Logo, assumindo-se a princípio que as coordenadas e velocidade dos vértices de cada solução não coincidem, tem-se o seguinte (sem redundância) sistema:

$$\begin{pmatrix} v_{x_{GPS}} \\ v_{\dot{x}_{GPS}} \\ v_{x_{VLBI}} \\ v_{\dot{x}_{VLBI}} \\ v_{x_{DORIS}} \\ v_{\dot{x}_{DORIS}} \\ v_{x_{SLR}} \\ v_{\dot{x}_{SLR}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{GPS} \\ \dot{x}_{GPS} \\ x_{VLBI} \\ \dot{x}_{VLBI} \\ x_{DORIS} \\ \dot{x}_{DORIS} \\ x_{SLR} \\ \dot{x}_{SLR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{GPS} - x_{GPS}^0 \\ \dot{x}_{GPS} - \dot{x}_{GPS}^0 \\ \dots \\ \dots \\ x_{DORIS} \\ \dot{x}_{DORIS} \\ x_{SLR} \\ \dot{x}_{SLR} - \dot{x}_{SLR}^0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

A matriz peso, equação normal de cada conjunto de resultados, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} N_{x_{GPS}} & N_{\dot{x}_{GPS}} & 0 & \dots & 0 \\ N_{\dot{x}_{GPS}} & N_{\dot{\dot{x}}_{GPS}} & \dots & & 0 \\ \dots & & N_{x_{VLBI}} & & \dots \\ & 0 & 0 & & N_{\dot{x}_{SLR}} \end{pmatrix} = N_{FINAL} \quad (21)$$

Da forma como foi apresentada a solução, assume-se que cada tecnologia não tem ligação com a outra. Logo, a equação normal resultante será igual a matriz P . Mas quando se tem conexões confiáveis entre duas tecnologias, pode-se introduzir as equações de observação referentes às medidas que foram utilizadas na conexão (ângulos, distâncias, diferença de nível, etc.), permitindo a integração das soluções. Nesses casos, as velocidades de estações próximas, ocupadas por duas ou mais técnicas, podem ser igualadas.

Quando um conjunto de estações pode ter suas velocidades consideradas iguais, essas informações podem ser introduzidas na solução mediante a aplicação de uma transformação no conjunto de equações normais (ANGERMANN et al., 2004).

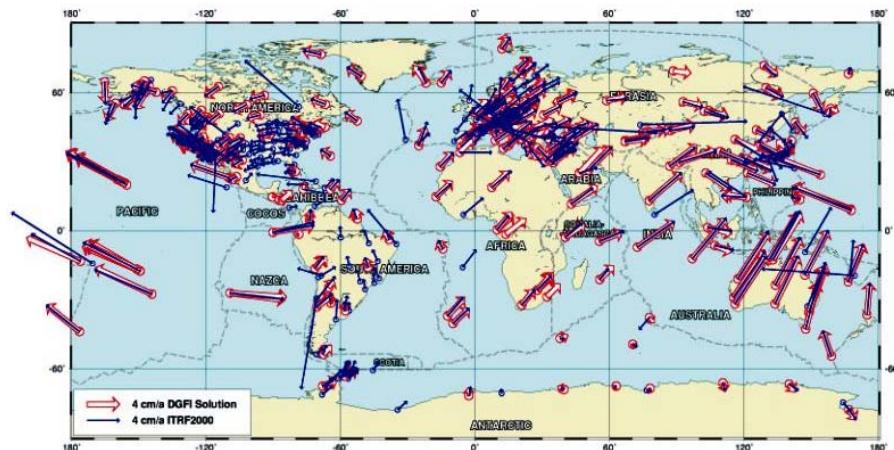
Uma vez que os pesos de cada técnica (P_{TEC}) forem atribuídos adequadamente a cada uma das soluções, o que pode ser obtido via análise de variância (KOCH, 1987), obtém-se a solução final $X(t_0)_f$ para as coordenadas e V_f para as velocidades. As equações normais advindas do GPS (N_{GPS}), VLBI (N_{VLBI}), DORIS (N_{DORIS}) e

SLR (N_{SLR}) devem ser livre de injunções. Logo, pelo fato de se ter soluções VLBI, que proporcionam escala, SLR que proporcionam origem, bem como o GPS e DORIS que auxiliam na definição de escala e origem, as quais estão inter-ligadas via conexões locais, a solução final tem deficiência apenas em rotação (H_R). Logo, deve-se introduzir essa injunção, a qual é representada pela equação (03), no que se refere as coordenadas das estações. Ademais, para um grupo de estações bem distribuídas, e com resultado de análises bastante cuidadosas, pode-se introduzir a condição de NNR envolvendo as velocidades dessas estações. Então, deve-se introduzir a injunção representada pela equação (12). Pode-se então, finalmente, solucionar o sistema visando-se a solução final.

Detalhes de implementação da solução combinada do DGFI (Deutsche Geodätische Forschungsinstitut) e sua comparação com o ITRF2000 (Fig. 1) podem ser encontrados em Angermann et al., (2004). Na figura 1 pode-se verificar discrepâncias além do esperado para a solução ITRF2000. Isso se deve ao fato de que, mesmo com toda a tecnologia disponível e cuidados tomados no processamento dos dados, a solução final não está totalmente de acordo com o que foi apresentado neste artigo, produzindo essas discrepâncias. Por exemplo, nem todas as injunções aplicadas nas soluções individuais (inter-solução) do ITRF2000 puderam ser eliminadas na solução final e alguns conjuntos de estações com velocidades discrepantes tiveram seus valores igualados na solução final. Mais detalhes podem ser obtidos em Monico, Baez e Drewes (2005).

Figura 1: Velocidade das estações na inter-solução do DGFI e no ITRF2000

Station velocities of DGFI solution compared to ITRF2000



5. COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

Apresentou-se, de uma forma geral, os fundamentos matemático envolvidos na realização do ITRS. Cada solução individual apresenta certas deficiências para produzir um referencial global. Mas o sinergismo entre as diferentes tecnologias resulta num resultado ótimo, sendo que não comparecem informações externas na solução. O resultado que se obtém reflete a precisão atual das tecnologias espaciais disponíveis para a Geodésia na determinação de posição e velocidade de estações sobre a crosta terrestre. A origem do sistema é determinada a partir de soluções SLR. A escala fica inserida a partir de soluções VLBI, bem como SLR. A orientação e sua evolução temporal são introduzidas via injunção internas, de modo que atendam as condições NNR.

Finalmente apresentou-se alguns resultados preliminares obtidos no DGFI, mostrando algumas inconsistências na atual realização do ITRS, o ITRF2000. Elas se devem, principalmente, pelo fato de que nem todas as injunções presentes nas intra-soluções puderam ser adequadamente removidas na inter-solução, além de problemas concernentes com a suposição de estações com velocidades iguais, dentre outras.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALTAMIMI Z., SILLARD P., BOUCHER C. ITRF2000: An new release of the international terrestrial reference frame for Earth science applications, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 107 NO. B10, 2214, 2002.
- ANGERMANN D., DREWES D., GERSTL M., KELM R., KRUGEL M., MEISEL B., GERSTL M., KELM R., MÜLLER H., SEEMÜLLER V., TESMER V. *ITRS Combination Center at DGFI:A Terrestrial Reference Frame Realization 2003*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 313, 2004.. Report available at <http://www.dgfi.badw.de>.
- GEMAEL C. *Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas*, Editora da UFPR, Curitiba, PR, 319 p. 1994.
- HEFLIN M., BERTIGER W., BLEWITT G., FREEDMAN A., HURST K., LICHTEN S., LINDQWISTER V., VIGUE Y., WEBB F., YUNK T. and ZUMBERGE J. Global Geodesy using GPS without fiducial sites. *Geophysical Research Letters*, Vol. 19. No. 2, pp.131-134, January, 24- 1992.
- IERS CONVENTIONS (2003). Dennis D. McCarthy and Gérard Petit. (*IERS Technical Note 32*) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2004. 127 pp., paperback, ISBN 3-89888-884-3 (print version)
- KOCH K. R. *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*, Springer-Verlag, Berlin, 378p.,1987.

- MONICO J. F. G. *High Precision Inter-continental GPS Network*. PhD Thesis, The University of Nottingham, 205p. 1995.
- MONICO J. F. G. Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS. *Descrição, Fundamentos e Aplicações*. Editora UNESP, 297p., 2000.
- MONICO J. F. G. As condições NNT e NNT na realização de referenciais, *Boletim de Ciências Geodésicas*, Vol. 11, No. 1, p.45-52, 2005.
- MONICO J. F. G., BAEZ J.C. e DREWES H. O estado da arte em referenciais geodésicos: ITRF000 a as próximas realizações do ITRS, *Boletim de Ciências Geodésicas*, Vol. 11, No.2, p.261-277, 2005.
- SAPUCCI, L. F. e MONICO, J. F. G. *Transformação de Helmert generalizada no posicionamento de alta precisão: fundamentação teórica e exemplificações*. Rev. Bras. Geof., maio/ago. 2000, vol.18, no.2, p.161-172. ISSN 0102-261X.
- SEEBER G. *Satellite Geodesy: foundations, methods and applications*, Berlin, New-York: Walter de Gruyter, 567p.,2003

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho foi desenvolvido com o suporte da CAPES e do DAAD dentro do programa de cooperação internacional, cujas atividades foram desenvolvidas no DGFI na Alemanha. O autor agradece as críticas e sugestões dos revisores deste artigo, as quais proporcionaram elementos para melhorar a qualidade do mesmo.

Recebido em janeiro/2005. Aceito em junho/2006)

