

CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS SOBRE AS MEDIDAS DE TEMPO GPS

Relativistic corrections on the GPS time measurements

ANGELA CRISTINA CARARO¹
LUIZ DANILO DAMASCENO FERREIRA²
GERMANO BRUNO AFONSO³

¹Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR, Brasil; angelacristina@ufpr.br

²Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR, Brasil; luizdanilo@ufpr.br

³Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Dourados, MS, Brasil, planetarioindigena@hotmail.com

RESUMO

Há uma diferença de potencial gravitacional não negligenciável entre os satélites do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e os usuários sobre a superfície da Terra. A grande velocidade desses satélites (4 Km/s), a rotação da Terra e essa diferença de potencial, combinados com medidas de tempo com precisão de nanossegundos, nas quais está fundamentado o GPS, dão lugar a importantes efeitos relativísticos. Neste trabalho é feita uma descrição dos dois principais efeitos sobre as medidas de tempo GPS, tais como o desvio de frequência gravitacional e o desvio de frequência pelo efeito Doppler de segunda ordem. São analisadas e comentadas as correções relativísticas convencionais sobre as medidas de tempo GPS. Os novos desenvolvimentos sobre as correções padrão, levando-se em conta o efeito do potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre sobre a marcha dos relógios dos satélites GPS, são também mostrados e comentados. São realizados testes com a nova correção relativística com o objetivo de verificar sua magnitude e influência sobre a marcha dos relógios dos satélites. Os resultados encontrados mostram que a ordem de grandeza deste efeito é da ordem de 0,1 a 0,2 nanossegundos, atrasando ou adiantando a marcha dos relógios em função da posição e velocidade instantâneas do satélite GPS.

Palavras-chave: GPS; Sincronização; Relatividade.

ABSTRACT

The gravity potential differences between Global Positioning System (GPS) satellites and users on the Earth surface are not negligible. The high velocities of such satellites (4 Km/s), Earth rotation, and potential differences combined with time measurements, with precision of up to nanosecond are essential in GPS positioning and yield some fundamental relativistic effects. Two principal effects about GPS time are described in this research: gravitational frequency shift and second order Doppler frequency shift. Conventional relativistic corrections are commented and analyzed over GPS time measurements. New developments about standard corrections, taking into account perturbing potential effects which are generated by the Earth flattening (J_2) over GPS satellite clocks, are also investigated. Several tests have been performed using new relativistic corrections trying to verify their magnitude and influence on the rate of the satellite clocks. The results obtained point out a magnitude between 0.1 and 0.2 ns for such effects, with an increase or a decrease in the clock rate, depending on the position and instantaneous velocity of the GPS satellite.

Keywords: GPS; Synchronization; Relativity.

1. INTRODUÇÃO

Das teorias da relatividade geral e especial é conhecido que, comparado com relógios em solo, o “tempo local” ou “tempo próprio” experimentado por um observador numa dada posição do espaço depende de sua localização e de sua dinâmica. Estando em repouso ou movendo-se faz diferença, e há também uma influência relacionada ao gradiente do potencial gravitacional. O indicador mais importante deste fenômeno é a marcha do relógio (“*clock rate*”), isto é, a rapidez na mudança da medida do tempo local, T_{LOC} , comparado com uma medida ideal de tempo t , em solo: $\partial T_{LOC} / \partial t$. Entretanto, mesmo em solo, as mudanças no potencial gravitacional dependem do local considerado e a velocidade linear de um ponto em repouso sobre a superfície da Terra depende da latitude, em função da rotação de nosso planeta.

A relatividade geral estabelece uma distinção entre quantidades próprias que são diretamente mensuráveis e quantidades coordenadas que dependem de algumas convenções. Enquanto medições básicas são quantidades próprias (por exemplo, tempo e frequência), coordenadas são as ferramentas necessárias para estudar, através de modelagem, a interação dos fenômenos físicos com as medidas. Elas são também os instrumentos básicos para intercâmbio e síntese dos resultados das medidas, principalmente através das coordenadas dos objetos (e.g.: estação geodésica, fonte de rádio) realizando (materializando) uma referência espacial.

Em 1991 a União Astronômica Internacional (*IAU – International Astronomical Union*) adotou explicitamente a teoria da relatividade geral como a base teórica para a definição e realização dos sistemas de referência espaço-tempo (*IAU, 1991*).

Escalas de tempo, coordenadas geocêntricas e baricêntricas e as transformações relativísticas entre elas foram definidas, juntamente com os procedimentos para sua realização. Escalas de tempo coordenado nas vizinhanças da Terra podem ser realizadas por uma média ponderada de relógios atômicos operando na superfície da Terra ou em satélites terrestres. Para este propósito os relógios devem ser sincronizados usando-se uma teoria relativística que ofereça o nível de acurácia requerido (KOUBA, 2002).

O Sistema de Posicionamento Global *NAVSTAR-GPS* (*Navigation System With Time And Ranging - Global Positioning System*) consiste de uma constelação de 24 satélites, cada um carregando relógios atômicos acurados e altamente estáveis. Há quatro satélites em cada um dos seis diferentes planos orbitais, inclinados 55° em relação ao equador terrestre, com período de aproximadamente 12 horas. Os satélites transmitem sinais de tempo sincronizados, com informações sobre tempo e posição no momento da transmissão. Um receptor *GPS* em solo, a bordo de uma aeronave ou satélite terrestre pode determinar sua posição e tempo decodificando as mensagens de navegação transmitidas por, pelo menos, quatro satélites. O *GPS* é um sistema no qual a relatividade é essencial para sua performance. Há basicamente três formas da relatividade afetá-lo: nas equações de movimento da órbita dos satélites, na propagação dos sinais eletromagnéticos e na marcha dos relógios dos satélites. A base tecnológica do *GPS* repousa em relógios atômicos extremamente acurados e estáveis, que sofrem a influência da relatividade geral e restrita sobre seus padrões de frequência. Os relógios atômicos a bordo dos satélites *GPS* sofrem desvios de frequência relativísticos em função de sua velocidade e diferença de potencial gravitacional em relação aos usuários. Esses desvios tornariam o sistema não operacional se não fossem contabilizados.

Neste trabalho estão apresentadas as correções padrão para efeitos relativísticos que atuam sobre medidas de tempo e sincronização no *GPS*, com ênfase nos desvios de frequência relativísticos sofridos pelos relógios dos satélites. É investigado um modelo melhorado para as correções padrão (ICD-GPS-200c, 1993) utilizadas no alinhamento do tempo gerado a bordo dos satélites com o Tempo *GPS* (medido sobre o geóide), descrito por KOUBA (2004). Neste novo modelo a influência do potencial gravitacional perturbador gerado pelo achatamento terrestre J_2 sobre a marcha dos relógios dos satélites *GPS* não é negligenciada. É desenvolvida uma metodologia para o cálculo do efeito relativístico de J_2 sobre o tempo fornecido pelos relógios a bordo dos satélites GPS. Os resultados obtidos para os satélites pesquisados, com dados do dia 06 de novembro de 2005, mostram claramente que há uma parte periódica e outra constante no erro relativístico causado por J_2 nos relógios dos satélites. No caso da parte periódica esse erro possui um período de 6 horas, e a amplitude média encontrada foi de aproximadamente 0,15 ns. Para a parte constante do erro causado por J_2 foram encontrados valores de até 0,2 ns/dia. Este trabalho inclui também a apresentação de gráficos e tabelas

baseados no novo modelo e que fornecerão informações sobre a sua relevância para as aplicações geodésicas.

2. GPS E RELATIVIDADE

Sejam quatro relógios atômicos (assumidos como ideais), sincronizados, que transmitem pulsos eletromagnéticos bem definidos e individualmente identificados, à partir das posições \vec{r}_j , nos instantes t_j , com $j = 1, 2, 3, 4$ (conhecidos através das efemérides transmitidas pelos satélites que contém os relógios). Supondo que esses quatro sinais sejam recebidos simultaneamente na posição \vec{r} no instante t , pelo princípio da constância da velocidade da luz, c , pode-se escrever (SEEBER, 1993), (ASHBY, 2003):

$$c^2(t - t_j)^2 = \left| \vec{r} - \vec{r}_j \right|^2, \text{ com } j = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

onde c vale 299792458 m/s.

Estas quatro equações contém as quatro incógnitas de posição e tempo do receptor *GPS*, $\{\vec{r}, t\}$ que ficam, assim, determinadas. Portanto, o princípio da constância de c é o conceito fundamental no qual o *GPS* está fundamentado. Deve-se observar que erros na determinação do tempo de 1 nanossegundo levam a erros de posicionamento na ordem de 30 cm. A equação (1) é válida somente no sistema inercial *ECI* (*Earth Centered Inertial Frame*), pois para sistemas rotacionais a luz não percorre uma linha reta e sim, espirais (ASHBY, 2002).

Medidas de tempo acuradas são o “coração” do sistema *GPS*. Em virtude do alto desempenho e acurácia dos relógios à bordo dos satélites, medidas de pseudodistâncias podem ser efetuadas na ordem de nanossegundos e a fase da portadora no nível do centímetro. Isso associado ao fato de que os satélites *GPS* possuem alta velocidade, aproximadamente 4 Km/s, de que há uma diferença de potencial gravitacional não negligenciável entre satélites e usuários. E que há diferentes sistemas de referência (inercial para os satélites, rotacional para os usuários) envolvidos no processo, fazem do *GPS* um dos primeiros sistemas operacionais (além dos aceleradores de partículas) onde os efeitos da relatividade geral e especial são significativos e devem ser levados em conta. Erros relativísticos no *GPS* são muito maiores do que uma parte em 10^{13} (ASHBY e SPILKER, 1996). De fato, o sistema *GPS* não seria operacional se esses efeitos não fossem contabilizados, pois, apesar de pequenos quando comparados com outras fontes de erro envolvidas, os erros relativísticos são cumulativos em função da inexorável passagem do tempo (ASHBY, 2002).

2.1 Relógios em Solo

Em virtude dos relógios em solo estarem sujeitos a um campo gravitacional e, em alguns casos, terem outro movimento além daquele da rotação da Terra, estão sujeitos a desvios de frequência devidos a efeitos gravitacionais e ao efeito Doppler de 2ª. ordem (dilatação temporal). Um desvio na frequência do padrão de vibração de um relógio implica em alteração da sua marcha e acompanhamento do tempo, e consequente dessincronização com outros relógios. Isso depende basicamente de:

- a) movimento dos relógios,
- b) relógios a diferentes alturas em relação a uma superfície de referência (geóide),
- c) direção dos movimentos (em relação à rotação da Terra).

A sincronização de relógios na superfície da Terra deve levar em conta o fato de que o “tempo próprio” de cada um dos relógios, em seu próprio referencial, difere ligeiramente. Os tempos envolvidos na equação (1) devem ser provenientes de um esquema auto-consistente de sincronização para que ela seja válida. Para isso, uma rede de relógios deve satisfazer duas importantes relações (ASHBY, 1994):

a) reflexividade: Se o relógio A está sincronizado com o relógio B, então, B está sincronizado com A;

b) transitividade: Se o relógio A está sincronizado com o relógio B, e o relógio B está sincronizado com o relógio C, então, A está sincronizado com C.

Em um referencial inercial, relógios podem ser sincronizados pelo *procedimento de Einstein*, que leva em conta o atraso l/c entre a transmissão e recepção de um sinal que percorre a distância l entre dois relógios. Um procedimento equivalente é necessário para sincronização através de deslocamento de relógios atômicos-padrão. No *GPS* essa sincronização é realizada através da adoção de *tempo coordenado* t . Basicamente supõe-se que não há campo gravitacional envolvido e que relógios-padrão hipotéticos estariam em repouso em relação a um referencial não rotacional subjacente, mas com origem no centro de massa da Terra. Em cada ponto desse referencial subjacente haveria um relógio-padrão fictício sincronizado com os outros pelo procedimento de Einstein, todos os relógios marchando no mesmo ritmo para manter a sincronização (ASHBY, 2003). Para o conjunto de relógios reais (alguns em movimento) sobre a superfície da Terra em rotação, aplicam-se correções, baseadas em suas posições e velocidades conhecidas, para que eles concordem instantaneamente com um relógio fictício subjacente. Isso gera um *tempo coordenado*. O tempo *GPS* é mantido por um conjunto de aproximadamente 50 relógios atômicos de Césio e 12 *masers* de Hidrogênio, coordenados pelo *US Naval Observatory*.

Considera-se agora o campo gravitacional da Terra. Nas suas vizinhanças, e, considerando-se um sistema de referências inercial ligado ao seu centro de massa, o intervalo invariante ds^2 da relatividade geral pode ser escrito aproximadamente como (ASHBY, 2002):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt')^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2)$$

onde $\Phi < 0$ é o potencial gravitacional Newtoniano. A variável t' na equação (2) se refere ao tempo coordenado, com os relógios padrão de referência situados no infinito; x, y, z são as coordenadas no sistema inercial.

Entretanto, o padrão do Tempo Atômico Internacional (*TAI*) é baseado em relógios em repouso ao nível do mar, e estão sujeitos a efeitos relativísticos (desvio Doppler de 2ª. ordem e desvio gravitacional para o vermelho) em relação aos relógios situados a 20.000 Km acima do nível do mar. As duas diferentes variáveis t' e t podem ser reconciliadas através de uma mudança de escala. A variável temporal t verdadeiramente utilizada no tempo *GPS* está relacionada com o tempo coordenado t' da equação (2) por (ASHBY, 2002):

$$t' = t \left(1 - \frac{U}{c^2}\right) \quad (3)$$

onde U é uma constante que inclui efeitos gravitacionais devidos a distribuição de massas da Terra e efeitos rotacionais. É um fato extremamente útil que a superfície idealizada para o nível médio dos mares – o geóide – é uma equipotencial gravitacional no sistema rotacional, pois, dessa forma, todos os relógios-padrão sobre ela marcham no mesmo ritmo. Relógios-padrão sobre a superfície da Terra, que não estão sobre o geóide, devem receber correções (ASHBY, 2003).

2.2 Relógios em Órbita

Os relógios dos satélites *GPS* encontram-se a grande altura acima do geóide e apresentam movimentos ao longo das componentes radial e transversal de sua trajetória. Dessa forma, estão sujeitos a efeitos relativísticos como desvios de frequência gravitacionais e desvios de frequência devidos ao efeito Doppler de 2ª. ordem. Após substituir a equação (3) adequadamente na equação (2), e considerando um relógio atômico movendo-se ao longo de uma trajetória arbitrária, o incremento no tempo próprio ds/c , e resolvendo a equação (3) para dt e integrando dt ao longo da trajetória, gera-se o *tempo coordenado* t (ASHBY, 2003):

$$\int_{traj} dt = \frac{1}{c} \int_{traj} \left[1 - \frac{\Phi - U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right] ds \quad (4)$$

Os efeitos de diferença de potencial gravitacional e Doppler de 2ª. ordem estão contabilizados nos dois últimos termos dentro dos colchetes. Esses dois

efeitos afetam de forma oposta os relógios dos satélites. Enquanto o Doppler de 2ª ordem causa um atraso e conseqüente desvio de frequência para o vermelho, o efeito gravitacional os adianta e causa um desvio de frequência para o azul, quando vistos do geóide. Para satélites de órbitas baixas predomina o desvio para o vermelho. Para satélites posicionados a aproximadamente 3000 Km acima da superfície, os dois efeitos se cancelam. Por outro lado, para satélites mais altos, como os geostacionários e *GPS*, predomina o desvio para o azul (ASHBY 2002).

Mas as órbitas dos satélites *GPS* não são perfeitamente circulares, de forma que, além da correção constante apresentada anteriormente, há efeitos periódicos sobre os relógios dos satélites. A elipticidade da órbita faz os relógios “subirem” e “descerem” a diferentes alturas dentro do campo gravitacional da Terra, com diferentes velocidades. Isso se reflete em mudanças no padrão de vibração dos relógios atômicos e faz surgir novos desvios de frequência periódicos. A correção para efeitos periódicos, conhecida como correção relativística convencional para a excentricidade da órbita (dada em $s/m^{1/2}$), efetuada pelo *software* do receptor *GPS*, é (ICD-GPS-200c, 1993):

$$\Delta t_r = +4,4428 \times 10^{-10} e \sqrt{a} \cdot \text{sen} E, \quad (5)$$

onde e é a excentricidade da órbita, a é semi-eixo maior e E é a anomalia excêntrica do satélite (SEEBER, 1993), (ASHBY, 2003).

2.3 Correções Relativísticas Convencionais para o *GPS*

A seguir serão apresentados alguns detalhes da obtenção das equações convencionais padrão (ICD-GPS-200c/1993) para as transformações relativísticas sobre o tempo *GPS* (IAU, 1991), (BURSA et al., 1998), (PETIT, 1998), (KOUBA, 2002), (ASHBY, 2003), (LAGRASTA, 2004), (KOUBA, 2004).

De acordo com a resolução A4 do IAU (1991) (a mesma realização relativística dos sistemas de referência espaço-tempo foi também adotada, em 1991, pela *IUGG - International Union of Geodesy and Geophysics*) o padrão de vibração (*rate*) de um relógio em movimento, **externo** a Terra e marchando no tempo T está relacionado ao *TCG* (Tempo Coordenado Geocêntrico) através das teorias da relatividade especial (velocidade) e geral (posição no campo gravitacional) por transformações relativísticas que oferecem precisão de 10^{-18} .

$$\frac{dT}{dT_{CG}} = 1 - \left[\frac{V(x, y, z) + \Delta V(x, y, z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right], \quad (6)$$

onde V e ΔV são os potenciais gravitacionais da Terra e de marés (devido à Lua, Sol e planetas) na posição do relógio (x, y, z) , e v é a velocidade do relógio, num sistema de coordenadas geocêntrico e não rotacional (inercial). De acordo com IAU (1991) o TCG é realizado na prática através do TT (*Terrestrial Time*). Esta escala é observável, está definida ao nível médio dos mares, e está convencionalmente relacionada ao TCG através da teoria da relatividade geral por:

$$\frac{dT}{dTT} = 1 - \frac{W_0}{c^2} = \text{constante} = 6,263685600 \times 10^7 \quad (7)$$

onde W_0 é o potencial gravitacional ao nível médio dos mares (sobre o geóide em rotação). Para um relógio sobre o geóide,

$$W_0 = V(x, y, z) + \Delta V(x, y, z) + \frac{\omega_E^2(x^2 + y^2)}{2}, \quad (8)$$

o observador é afetado pela velocidade de rotação da Terra ω_E . W_0 refere-se ao nível médio dos mares e latitude equatorial. Como W_0 é uma constante, TT difere do TCG por uma taxa constante. Inversamente, a razão $dTT/dTCG$ poderia ser usada para definir o geóide (PETIT, 1998).

Na prática, TT é realizado através do TAI (Tempo Atômico Internacional), que é uma média ponderada sobre um grande número de relógios atômicos (aproximadamente 200) espalhados pelo mundo, que apresentam tempo próprio T_i , ligado ao TT , por $dT_i/dTT = 1 - (W_i + \Delta W_i - W_0)/c^2$, onde ΔW_i é o correspondente potencial de marés, W_i é o geopotencial na posição do relógio T_i e depende do conhecimento acurado de sua posição em relação ao geóide ou da diferença $W_i - W_0$.

Para transformar o tempo próprio de um relógio em movimento, exterior a Terra (e.g., a bordo de um satélite), que marcha no tempo T , para uma escala de tempo onde estão normalmente os observadores e receptores GPS , são necessárias duas passagens: primeiro de T para TCG e então de TCG para TT , resultando:

$$\frac{dT}{dTT} = 1 - \left[\frac{V(x, y, z) - W_0 + \Delta V(x, y, z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] \quad (9)$$

Resumidamente, a maneira prática de realizar (materializar) TT ou TCG a partir de relógios nas vizinhanças da Terra é:

1. para relógios nos satélites: transformar o tempo próprio do relógio para o *TCG* usando a métrica descrita em IAU (1991). O *TT* pode então ser obtido pela razão $\partial TT/\partial TCG$;

2. para relógios sobre a superfície da Terra: determinar a diferença de potencial gravitacional entre a posição do relógio e a do geóide e então transformar diretamente o tempo próprio para *TT* usando esta diferença de potencial e as relações de IAU (1991). O *TCG* pode ser obtido através da razão $\partial TT/\partial TCG$.

Assumindo-se que a escala de tempo *GPS*, t é a mesma do *TT* e chamando-se de T_{SV} ao tempo T de um relógio a bordo de um satélite *GPS*, com coordenadas (x, y, z) , obtêm-se a transformação relativística entre as escalas de tempo do *GPS*, t e do relógio do satélite *GPS*, T_{SV} :

$$\frac{dT_{SV}}{dt} = 1 - \left[\frac{V(x, y, z) - W_0 + \Delta V(x, y, z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] \quad (10)$$

Assume-se que em $t = 0$ as duas escalas de tempo estão alinhadas, ou seja: $t = T_{SV} = 0$. Para integrar a equação (10) algumas simplificações serão consideradas de acordo com as recomendações contidas no documento ICD-GPS-200c/93:

1. negligenciar o potencial de marés ΔV ;
2. usar o modelo básico (sem perturbações) para o potencial gravitacional V , ou seja: $V = \mu/r$;
3. usar as fórmulas da Dinâmica Orbital que correspondem ao movimento Kepleriano;

$$v = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \quad n = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}, \quad E(t) = E(0) + n \cdot t + e \cdot \text{sen}(E) \quad (11)$$

onde $\mu = GM = 3,986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, é a constante gravitacional da Terra. Integrar a equação (10), sem levar em conta ΔV e o potencial perturbador:

$$\int dT_{SV} = \int \left\{ 1 - \left[\frac{V - W_0 + (v^2/2)}{c^2} \right] \right\} dt \quad (12)$$

Colocando os extremos de integração e sendo $R_0 = \frac{\mu}{W_0} = 6363672,560 \text{ m}$, tem-se:

$$T_{SV}(t) = t - \frac{1}{c^2} \cdot \int_0^t \left(V + \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R_0} \right) \cdot dt, \quad (13)$$

$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) \cdot t - \frac{1}{c^2} \cdot \int_0^t \frac{2\mu}{r} \cdot dt, \quad (14)$$

$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) \cdot t - \frac{1}{c^2} \cdot \int_0^t 2\sqrt{\mu a} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dt, \quad (15)$$

$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) \cdot t - \frac{2\sqrt{\mu a}}{c^2} \cdot (E(t) - E(0)), \quad (16)$$

$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \cdot t - \frac{2\sqrt{\mu a}}{c^2} \cdot e \cdot \text{sen}(E), \quad (17)$$

$$t = T_{SV} - \frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \cdot t + \frac{2\sqrt{\mu a}}{c^2} \cdot e \cdot \text{sen}(E). \quad (18)$$

Tem-se agora a forma final das transformações relativísticas convencionais para o tempo *GPS*, considerando a órbita Kepleriana:

$$t = T_{SV} - \Delta t_{rel,convencional}, \quad (19)$$

$$\Delta t_{rel,convencional} = \frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \cdot t - \frac{2\sqrt{\mu a}}{c^2} \cdot e \cdot \text{sen}(E). \quad (20)$$

Todos os termos do lado direito da equação (20), com exceção de “*t*”, são devidos a efeitos relativísticos e devem ser devidamente compensados: multiplicados pela velocidade da luz *c*, eles podem ser todos convertidos em grandezas com dimensão de comprimento que representam erros relativísticos não negligenciáveis sobre as observáveis *GPS*.

Pode-se subdividir a equação (20) em duas partes, uma constante e outra periódica:

$$\Delta t_{rel,convencional} = \Delta t_{con} + \Delta t_{per}. \quad (21)$$

Na equação (21) Δt_{con} representa a parte constante das correções relativísticas convencionais, e Δt_{per} , que depende das características instantâneas da órbita do satélite *GPS*, representa a parte periódica. O termo Δt_{con} na equação (21) é pré-compensado por um desvio de frequência “calculado”, para os relógios dos satélites *GPS*, antes do lançamento. Devido aos efeitos relativísticos, o relógio do satélite *GPS*, ao alcançar a posição orbital final, estará marchando mais rapidamente do que quando estava em solo. Para fornecer a frequência esperada nominal $f_0 = 10,23 \text{ MHz}$, após entrarem em órbita, esses relógios deverão ser ajustados, ainda em solo, para apresentar uma frequência um pouco menor f :

$$f = f_0 \cdot \left(1 - \frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \right) \quad (22)$$

Como a parte constante da correção é efetuada (sobre o padrão de frequência dos relógios) antes que se conheça a órbita final do satélite, o valor do semi-eixo maior é admitido como sendo igual ao valor nominal de 26561400 m e então:

$$\frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) = -4,4647 \times 10^{-10} \quad (23)$$

$$f = 10,23 \times \left(1 - 4,4647 \times 10^{-10} \right) = 10,22999999543 \text{ MHz} \quad (24)$$

é a frequência na qual operam os relógios dos satélites *GPS* antes do lançamento. Pode-se expressar o impacto, em posicionamento *GPS*, desta parte constante convencional da correção relativística:

$$4,4647 \times 10^{-10} \cdot \frac{86400s}{dia} = 38,575 \frac{\mu s}{dia} \quad (25)$$

e multiplicando isto pela velocidade da luz:

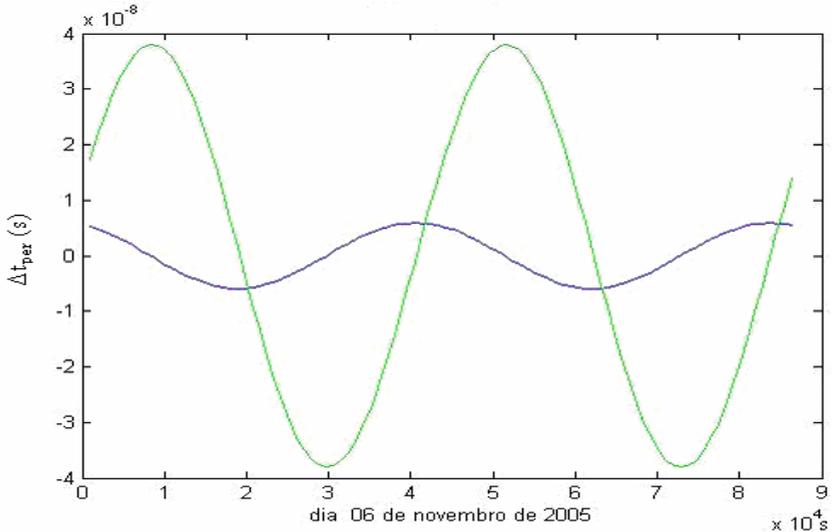
$$38,575 \times 10^{-6} \frac{s}{dia} \times 299792458 \frac{m}{s} = 11564,5 \frac{m}{dia} \quad (26)$$

ou seja, um erro acumulado de aproximadamente 11 Km por dia, caso a correção constante não fosse efetuada.

O termo Δt_{per} na equação (21) não é corrigido à priori como Δt_{con} , pois é função das variações instantâneas na posição e velocidade do relógio do satélite, causadas pela excentricidade da órbita. Essa correção é realizada pelo *software* dos

receptores *GPS*, de acordo com as normas contidas em ICD-GPS-200c/1993. Assim, os dados utilizados pelo receptor, no cálculo, são aqueles que são enviados nas efemérides transmitidas pelos satélites *GPS*, e a órbita é considerada Kepleriana, como já foi citado anteriormente. Como exemplo da ordem de grandeza desta correção periódica mostra-se, na figura 1, os gráficos de Δt_{per} para dois satélites *GPS* (*PRN* 13 e *PRN* 26) ambos no plano orbital *F*, para o dia 06 de novembro de 2005, com dados obtidos das efemérides precisas. Como pode ser observado, Δt_{per} pode variar de forma significativa, dependendo do satélite avaliado.

Figura 1 – Correção relativística para a excentricidade da órbita.



PRN 13 ; $e = 0,0026$

PRN 26; $e = 0,0166$

Os valores máximos de Δt_{per} expressos em segundos e também como uma distância (após multiplicados por c) para os dois satélites da figura 1 são:

$$\text{PRN 13: } \pm 0,5 \times 10^{-8} s \times 299792458 \frac{m}{s} = \pm 1,5m$$

$$\text{PRN 26 : } \pm 4 \times 10^{-8} s \times 299792458 \frac{m}{s} = \pm 12,0m$$

3. NOVOS DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS PARA AS CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS

As correções relativísticas convencionais para o tempo *GPS* apresentam erros em virtude das aproximações e simplificações efetuadas na sua obtenção. A constante melhoria nos padrões de frequência dos relógios dos novos satélites *GPS* tem evidenciado a necessidade de uma modelagem mais precisa dos efeitos relativísticos. Em Kouba (2004), a influência do potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre, sobre a marcha dos relógios dos satélites *GPS*, é levada em consideração na determinação das correções relativísticas. Considera-se o potencial gravitacional $V(x,y,z)$ na posição do relógio a bordo do satélite *GPS*:

$$V(x,y,z) = \frac{GM}{r} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{a_E}{r} \right)^n \cdot P_{nm}(\cos\theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \text{sen} m\lambda) \right] \right\}, \quad (27)$$

onde C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos e representam as perturbações gravitacionais causadas pela não esfericidade da Terra e distribuição não homogênea de massas. O termo que contém o somatório duplo expressa o potencial perturbador R e P_{nm} são os polinômios associados de Lagrange de grau n e ordem m . O potencial perturbador $R(\theta, \lambda, r)$, representa aproximadamente 10^{-4} do termo central (GM/r) e é devido principalmente ao primeiro termo da expansão em série na equação (27), $J_{20} = J_2 = 1,083 \times 10^{-3}$, que está associado ao achatamento polar terrestre.

As correções relativísticas completas sobre o *GPS* podem ser agora obtidas, inserindo-se $V(x,y,z)$ na equação (10), obtendo-se:

$$\int dT_{SV} = \int \left\{ 1 - \left[\frac{V - W_0 + \Delta V + (v^2/2)}{c^2} \right] \right\} \cdot dt \quad (28)$$

Convém lembrar que o objetivo da integração é alinhar o tempo próprio T_{SV} fornecido pelo relógio atômico do satélite *GPS* (e transmitido na mensagem de navegação) com o Tempo *GPS* t , fornecido pelos relógios-padrão sobre o geóide. Desprezando o potencial de marés e todos os termos do potencial perturbador, com exceção de J_2 , Kouba (2004) obtém uma expressão analítica para o erro causado por J_2 sobre os relógios dos satélites *GPS* (as aproximações consideradas permitem que tanto os elementos médios quanto os elementos osculadores sejam utilizados):

$$\delta\Delta t^{rel} = -\frac{a_E^2 J_2}{2a^2 c^2} \cdot \left[3\sqrt{GMa} \cdot \text{sen}^2 i \cdot \text{sen} 2u - \frac{7GM}{a} \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \cdot t \right], \quad (29)$$

onde i é a inclinação da órbita do satélite GPS e $u=(\omega+f)$ é o argumento da latitude, soma do argumento do perigeu e da anomalia verdadeira. Uma metodologia foi desenvolvida neste trabalho para investigar os resultados da equação (29).

4. TESTES E RESULTADOS

A metodologia desenvolvida para a geração dos gráficos e tabelas consiste em:

1. Obter, via *Internet*, (<http://igsceb.jpl.nasa.gov>) os arquivos no formato *SP3* fornecidos para a data de interesse (06/11/2005). Esse arquivo contém as três componentes do vetor posição para cada um dos satélites da constelação *GPS* ativos para aquela data. Os dados são fornecidos com intervalos de 15 min, o vetor posição é dado em *Km*, com precisão de 5 *cm*. Para essa data, os dados estão referenciados ao *ITRF2000*. Os arquivos *SP3* contêm as efemérides precisas produzidas pelo *IGS* e estão disponíveis na *Internet* com 10 a 12 dias de latência.
2. Os dados obtidos devem agora ser utilizados para a geração de um novo arquivo, no formato *SP1*, contendo o vetor de estado completo (as três componentes da posição e as três da velocidade), para um conjunto de 12 satélites *GPS* escolhidos, sendo 2 satélites de cada plano orbital (com a maior e a menor excentricidade) ocupando lugares (“*slots*”) diferentes.
3. O vetor de estado no *SP1* está no sistema terrestre (*CTS*) e deverá ser transformado para o sistema inercial (*CIS*). As matrizes de transformação encontram-se em SEEBER (1993).
4. Através de uma nova mudança de coordenadas e das equações da Dinâmica Orbital para o movimento Kepleriano, o vetor de estado passa do *CIS* para o sistema orbital, gerando um novo arquivo contendo os elementos orbitais: a , e , i , Ω , ω , M . As matrizes de transformação encontram-se em GEMAEL e ANDRADE (2004).
5. Obter o arquivo **Rinex** (GURTNER, 2001) contendo as efemérides transmitidas para os satélites *GPS* escolhidos, no dia 06 de novembro de 2005.
6. Determinar os elementos orbitais médios a_0 , e_0 e i_0 à partir do arquivo **Rinex**.
7. Para cada um dos 12 satélites *GPS* escolhidos, o conjunto de dados contendo o vetor de estado no *CIS* (ao longo do dia 06/11/2005) é utilizado para gerar os gráficos da correção relativística padrão para a excentricidade da órbita, através da equação (5).
8. O conjunto de dados contendo os elementos orbitais (ao longo do dia 06/11/2005) é utilizado para gerar o gráfico da equação (29), que fornece uma correção para o efeito relativístico causado pelo achatamento terrestre sobre o tempo fornecido pelos relógios destes satélites. Esta etapa é realizada para cada um dos 12 satélites GPS.

Os passos 2, 3, 4 e 6 foram realizados através de programas escritos em linguagem de programação *Fortran*. Para gerar os gráficos dos passos 7 e 8 foi utilizado o programa computacional *Matlab*.

4.1 Resultados Obtidos e Análises

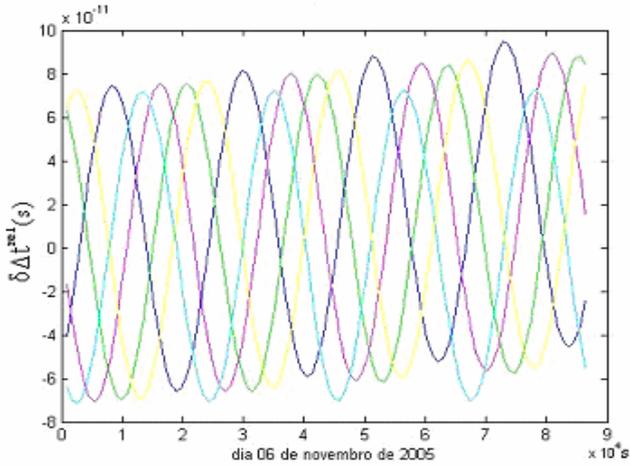
A tabela 1 mostra o conjunto dos satélites pesquisados neste trabalho, juntamente com os elementos orbitais médios a_0 , e_0 e i_0 para o dia 06 de novembro de 2005.

Tabela 1 – Satélites pesquisados

| <i>PRN</i> | <i>SVN</i> | <i>BLOCO</i> | $a_0 - a_n$ (m) | e_0 | $i_0 - 54.7^\circ$ | <i>plano slot</i> | <i>relógio</i> |
|------------|------------|--------------|-----------------|--------|--------------------|-------------------|----------------|
| 03 | 33 | II-A | - 1054,6 | 0,0075 | -1,59 | C2 | Cs |
| 08 | 38 | II-A | - 838,1 | 0,0096 | 0,90 | A3 | Cs |
| 10 | 40 | II-A | - 178,5 | 0,0066 | 1,22 | E3 | Cs |
| 11 | 46 | II-R | - 796,9 | 0,0048 | - 3,14 | D2 | Rb |
| 13 | 43 | II-R | - 1425,7 | 0,0025 | 2,04 | F3 | Rb |
| 16 | 56 | II-R | - 1941,0 | 0,0029 | 0,40 | B1 | Rb |
| 19 | 59 | II-R | - 281,5 | 0,0032 | 0,25 | C3 | Rb |
| 20 | 51 | II-R | - 1703,9 | 0,0024 | 0,28 | E1 | Rb |
| 21 | 45 | II-R | - 209,4 | 0,0104 | - 0,50 | D3 | Rb |
| 26 | 26 | II-A | - 1405,1 | 0,0166 | 1,93 | F2 | Rb |
| 27 | 27 | II-A | - 384,6 | 0,0193 | 0,06 | A4 | Cs |
| 28 | 44 | II-R | - 1332,9 | 0,0195 | 0,27 | B3 | Rb |

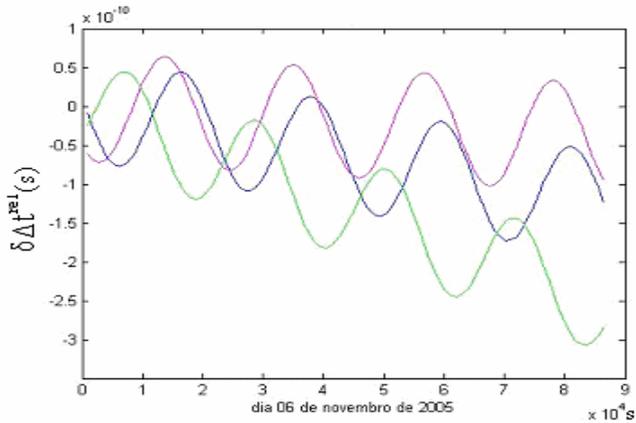
A avaliação da correção relativística, equação (29), é apresentada em forma de gráficos para os satélites disponíveis na tabela 1. Os resultados encontrados estão apresentados nas figuras 2 até 4. É interessante reunir os satélites *GPS* com inclinações orbitais médias i_0 semelhantes em um único gráfico. No eixo das ordenadas encontra-se $\delta\Delta t^{rel}$ e no eixo das abcissas, o tempo de propagação da órbita dos satélites *GPS*, que no caso é um dia, ou seja, duas órbitas.

Figura 2 – Influência de J_2 sobre os relógios dos satélites GPS para: $0 < i_0 - 54,7^\circ < 0,90$.



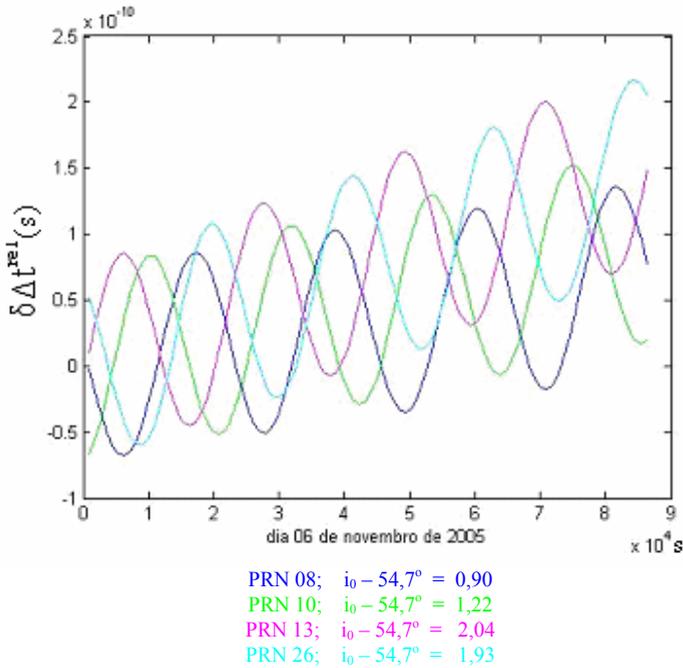
- PRN 16; $i_0 - 54,7^\circ = 0,40$
- PRN 19; $i_0 - 54,7^\circ = 0,25$
- PRN 20; $i_0 - 54,7^\circ = 0,28$
- PRN 27; $i_0 - 54,7^\circ = 0,06$
- PRN 28; $i_0 - 54,7^\circ = 0,27$

Figura 3 – Influência de J_2 sobre os relógios dos satélites GPS para: $i_0 - 54,7^\circ < 0$.



- PRN 03; $i_0 - 54,7^\circ = -1,59$
- PRN 11; $i_0 - 54,7^\circ = -3,14$
- PRN 21; $i_0 - 54,7^\circ = -0,50$

Figura 4 – Influência de J_2 sobre os relógios dos satélites GPS para: $i_0 - 54,7^\circ \geq 0,90$.



Os resultados obtidos para as figuras e tabelas apresentadas são coerentes com aqueles obtidos por KOUBA (2004). Isto significa que a abordagem teórica e a metodologia empregada se mostram adequadas para alcançar os resultados. Outros resultados podem ser encontrados em Cararo (2006).

Os gráficos mostram claramente que há uma parte periódica e outra constante, no erro causado por J_2 sobre os relógios dos satélites. A tabela 2 mostra o resultado encontrado para a parte **constante** do erro causado por J_2 nos relógios dos satélites, $\delta \Delta t_{const}^{rel}$, calculada através do segundo termo do lado direito da equação (29). Verifica-se que a parte constante pode apresentar erros de até $0,2 \text{ ns/dia}$.

A parte **periódica** do erro relativístico causado por J_2 , conforme os gráficos das figuras 2 até 4, possui um período de 6 horas, com amplitude média de $0,15 \text{ ns}$. Observa-se claramente o comportamento ascendente ou descendente das curvas, nas figuras 2 a 4, relacionado ao sinal positivo ou negativo da diferença $i_0 - 54,7^\circ$. A consequência física disto está em um pequeno adiantamento ou atraso (deriva) **constante** nos relógios dos satélites, causado pela parte constante da influência de J_2 e que é tanto maior, em módulo, quanto mais distante a inclinação média i_0 está da inclinação nominal $i_n = 54,7^\circ$.

Com relação à parte periódica, seu comportamento é semelhante àquele da equação (5), que representa a correção **convencional** para a excentricidade da órbita, corrigida pelos receptores *GPS*. O relógio dos satélites adianta ou atrasa ao longo da órbita em função de sua posição e velocidade instantâneas. Nota-se que a amplitude da nova correção não varia muito de um satélite *GPS* para outro, diferindo, neste aspecto, em relação à correção convencional equação (5).

Tabela 2 – Parte constante do erro causado por J_2 no relógio dos satélites GPS

| PRN | δA^{rel}_{const} (ns/dia) |
|-----|-----------------------------------|
| 03 | 0,1280 |
| 08 | - 0,0669 |
| 10 | - 0,0913 |
| 11 | 0,2510 |
| 13 | - 0,1538 |
| 16 | - 0,0272 |
| 19 | - 0,0164 |
| 20 | - 0,0189 |
| 21 | 0,0414 |
| 26 | - 0,1460 |
| 27 | - 0,0017 |
| 28 | - 0,0184 |

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pretendeu contribuir para explicitação das correções relativísticas sobre o tempo fornecido pelos relógios dos satélites *GPS* e também na investigação e verificação de uma metodologia própria para que fossem obtidas as correções relativísticas residuais causadas por J_2 , determinadas analiticamente por KOUBA (2004). Uma das aplicações práticas deste trabalho, em Geodésia, é a utilização destes conceitos e metodologia na estimação e predição de correções para os relógios dos satélites *GPS*.

O posicionamento por ponto preciso (*PPP*), cuja precisão atual pode alcançar até poucos milímetros (MONICO, 2000), depende consideravelmente da qualidade das órbitas e correções para os relógios dos satélites *GPS*. As correções fornecidas pelo *IGS* no formato *SP3* não contêm as correções relativísticas convencionais para os relógios dos satélites *GPS*. Conforme afirmado anteriormente, a parte constante é feita a priori (sobre o oscilador do relógio do satélite) e uma parte periódica (instantânea) é realizada pelo *software* do receptor *GPS*, necessária para o computo da pseudodistância, utilizando-se um modelo kepleriano simplificado para o potencial gravitacional. As correções *IGS* “modelam” os processos estocásticos característicos (inerentes) a osciladores atômicos (“*WPM*”, *white phase modulation noise*; “*FPM*”, *flicker phase modulation noise*; “*WFM*”, *white frequency*

modulation noise; “*FFM*”, *flicker frequency modulation noise*; “*RWFM*”, *random walk frequency modulation noise*) e também efeitos relativísticos residuais.

O *IGS* produz efemérides precisas finais com uma latência entre 12 a 18 dias, e acurácia de 75 ps (<http://igsb.jpl.nasa.gov/components/prods.html>). Desde novembro de 2000 o *IGS* distribui os produtos “ultra-rápidos” (*IGU*) contendo órbitas e relógios precisos dos satélites *GPS* para aplicações em tempo real ou quase real. Devido à latência na distribuição das efemérides precisas finais do *IGS*, somente as efemérides transmitidas pelos satélites *GPS* e a parte predita das efemérides ultra-rápidas do *IGS* são aplicáveis ao *PPP* em tempo real (*RT-PPP*). As efemérides ultra-rápidas do *IGS* são atualizadas a cada 6 horas e têm uma latência de 3 horas. Compreendem um intervalo de 48 horas onde as primeiras 24 horas são estimadas (acurácia: 150 ps) e as últimas 24 horas são preditas (acurácia: 3 ns). É interessante enfatizar a diferença entre estimar e prever as correções (*offsets*) dos relógios. Para estimação usam-se observações *GPS*, e, após o processamento de dados de uma rede de estações de referência, derivam-se os *offsets* para os relógios. Para predição, por outro lado, aplica-se um certo modelo para o relógio (linear, quadrático, periódico), ajustado (através de mínimos quadrados, por exemplo) sobre os *offsets* estimados e então faz-se a predição dos *offsets* dos relógios para um tempo futuro. Devido a sua latência, as efemérides *IGU* não são adequadas para algumas aplicações do *RT-PPP*.

Atualmente há um crescente interesse na investigação de novos métodos de estimar e prever os relógios dos satélites *GPS*, mais rápidos e acurados. Novas aplicações do *RT-PPP*, como por exemplo, determinação precisa da órbita de satélites de altimetria, meteorológicos ou de missões como o *GRACE*, *CHAMP* e determinação rápida da magnitude de terremotos para sistemas de alerta de *tsunamis*, necessitam de correções acuradas para órbitas e relógios *GPS* com menor latência. As órbitas podem ser preditas mais facilmente pois são o resultado de uma integração sobre um campo de forças bem conhecido. Já a predição dos relógios apresenta uma complexidade maior, em virtude do oscilador estar sujeito a erros devidos a efeitos randômicos, variações orbitais da temperatura e efeitos relativísticos convencionais e residuais, não obedecendo exatamente a uma modelagem mas devendo ser estimados.

Segundo Kouba (2004), uma pequena e constante deriva nos relógios dos satélites *GPS* não afetaria significativamente as interpolações ou extrapolações necessárias para a distribuição das informações a respeito destes relógios. Mas as perturbações periódicas são muito significativas neste aspecto, pois comprometem a qualidade das predições. A inclusão de J_2 é particularmente importante nos casos onde análise precisa de tempo (ou frequência) é necessária, como no caso de interpolações sobre o tempo fornecido pelos relógios dos satélites.

A precisão corrente dos relógios a bordo dos novos satélites *GPS* é da mesma ordem de grandeza do erro causado pela não inclusão de J_2 no modelo para o potencial gravitacional. Isso sugere que este erro não deva ser negligenciável ainda

por muito tempo dentro do sistema. A parte periódica da influência de J_2 é função da posição e velocidade instantâneas do satélite *GPS*. Os receptores *GPS* e os *softwares* de pós-processamento não realizam, ainda, esta correção. Isto sugere que a parte periódica da correção relativística, equação (29), também poderia ser efetuada em solo, ou pelos receptores *GPS* ou através de pós-processamentos. Isto indica que, em futuro próximo, os *softwares* para processamento de dados *GPS*, que realizam *PPP*, também poderão levar em conta a nova correção relativística. A ordem de grandeza da nova correção é de 0,1 a 0,2 ns, o que, multiplicado por c , se converte em distâncias entre 3 a 6 cm. A modelagem cada vez mais sofisticada dos erros que atuam sobre o posicionamento *GPS* melhora sua performance global e aumenta o interesse no *PPP*.

AGRADECIMENTO:

A primeira autora agradece ao CNPq pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASHBY, N. *Relativity in the Global Positioning System*. Living Reviews in Relativity, 6, (2003), 1.[Online Article]: citado em 5 de Maio de 2004. <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume6/2003-1ashby/>
- ASHBY, N. *Relativity and the Global Positioning System*. Physics Today, pp 41-47, Maio/2002.
- ASHBY, N. *Relativity in the Future of Engineering*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 43, número 4, Agosto de 1994.
- ASHBY, N. e SPILKER JR, J. J. *Introduction to Relativistic Effects on the Global Positioning System*, em PARKINSON, B. W. e SPILKER JR, J. J. (eds.), Global Positioning System: Theory and Applications, vol 1, cap. 18, 623-697. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington, 1996.
- BURSA M., KOUBA J., RADEJ K., VATRT V., VOJTISKOVA M., TRUE, S. A. *Determination of Geopotential At The Tide Gauge Defining The North American Vertical Datum 1988 (NAVD88)*. Geomatica vol. 53(3), pp. 291-296, 1998.
- CARARO, A. C. *Correções Relativísticas Sobre as Medidas de Tempo GPS* Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Setor de Tecnologia Da UFPR, Curitiba, 2006.([http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080/dspace/bitstream/1884/5785/1/ANGELA%20CRISTINA%20CARAR O.pdf](http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080/dspace/bitstream/1884/5785/1/ANGELA%20CRISTINA%20CARAR%20O.pdf))
- GEMAEL, C.; ANDRADE, J. B. *Geodésia Celeste*. Curitiba: Editora da UFPR, 2004.
- GURTNER, W. *Rinex: The Receiver Independent Exchange Format Version 2.1*. Astronomical Institute, University of Berne, 08 de junho, 2001.
- IAU *IAU Transactions*, vol. 11B. Kluwer, Dordrecht, 1991.

- ICD-GPS-200c *Interface Control Document*. NAVSTAR GPS Space Segment, Navigation User Interface. AIR Inc. Research Corporation, Fountain Valley, California, 10 de Outubro de 1993.
- KOUBA, J. *Relativistic Time Transformations in GPS*. GPS Solutions, vol 5, número 4, pp. 1-9, 2002.
- KOUBA, J. *Improved Relativistic Transformations in GPS*. GPS Solutions, vol. 8, pp. 170-180, 2004.
- LAGRASTA, S. *Navigation And Clocks, Time, Relativity Modelling: A Short Survey*. International Workshop On Galileo Time. Torino, Itália. 27 e 28 de Setembro de 2004.
- MONICO, J. F. G. *Posicionamento Por Ponto de Alta Precisão Utilizando o GPS: Uma Solução Para a Geodinâmica*. Brazilian Journal of Geophysics, vol. 18(1), 2000.
- PETIT, G. *Importance Of Common Framework For Realization Of Space-time Reference Systems* em Rummel R., Drewes H., Bosh W., Hornik H. (eds) *Towards An Integrated Global Geodetic Observing System (IGGOS)*. Berlin: Springer – Verlag, pp 1-7, 1998.
- SEEBER, G., *Satellite Geodesy: Foundations, Methods and Applications*. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

(Recebido em maio de 2009. Aceito em outubro de 2009.)