

# **COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO CONRADY-BROWN E ORTOGONAL PARA CALIBRAÇÃO**

Marconi Antão dos Santos  
ETFPE- UNED PETROLINA  
BR 407 KM 08  
Fone: (081) 862-2330

Prof. Dr. Quintino Dalmolin  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas - UFPR

## **RESUMO**

O presente trabalho compara o modelo de calibração de Conrady-Brown com o modelo Ortogonal. Utiliza-se do método de auto-calibração com câmeras convergentes com diferentes tipos de controle para avaliar qual o modelo fornece o menor erro médio quadrático entre as coordenadas fototrianguladas e as coordenadas padrão do campo de teste.

## **ABSTRACT**

This work compares a Conrady-Brown and Ortogonal models calibration. The self calibration method with convergent cameras and distincts control type is used to evaluate which one provide the small RMSE between the phototriangulation and the standard coordinates of the research field.

## **1. INTRODUÇÃO**

Na fotogrametria analítica emprega-se até os dias atuais, em nosso país, a modelagem de CONRADY-BROWN para calibração de câmeras fotogramétricas aéreas e terrestres. Na busca de novas modelagens executou-se a implementação do modelo de polinômios ORTOGONAIS (EL-HAKIN) e sua comparação com o modelo de CONRADY-BROWN, visando dessa forma fornecer a comunidade científica uma nova modelagem para teste e emprego nas instituições de ensino.

B. Ci. Geodésicas, Curitiba, v. 2, p.3-11, 1997.

## 2. MODELOS

### 2.1 MODELO DE CONRADY-BROWN

Considera as discrepâncias como sendo uma função dos fenômenos físicos sofridos pelo raio luminoso desde o espaço objeto (em nosso caso, desconsiderando a refração fotogramétrica) até a emulsão no filme. Divide-se em dois tipos de distorções:

#### 2.1.2 Distorção Radial Simétrica

A distorção radial simétrica teve seu modelo estabelecido por CONRADY(1919), através do seguinte polinômio;

$$\begin{aligned}\delta_x &= (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) (x - x_0) \\ \delta_y &= (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) (y - y_0)\end{aligned}\quad (01)$$

onde:  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  são as componentes do deslocamento do ponto qualquer de coordenadas (x,y);

r é a distância do ponto (x,y) ao ponto principal da foto de coordenadas (x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>);

K<sub>1</sub>,K<sub>2</sub>,K<sub>3</sub>,... são os parâmetros do polinômio, recuperados na calibração.

#### 2.1.3 Distorção Descentrada

O modelo matemático adotado atualmente foi apresentado por CONRADY(1919) e modificado por BROWN (1966), com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\delta_{x1} &= [P_1 (r^2 + 2x^2) + 2P_2 xy](1 + P_3 r^2 + \dots) \\ \delta_{y1} &= [2P_1 xy + P_2 (r^2 + 2y^2)](1 + P_3 r^2 + \dots)\end{aligned}\quad (02)$$

onde:  $\delta_{x1}$ ,  $\delta_{y1}$  são os componentes do deslocamento do ponto qualquer de coordenadas (x, y);

r é a distância do ponto (x,y) ao ponto principal da foto, de coordenadas (x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>);

P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> são os parâmetros recuperados na calibração.

Aplicando essa modelagem na equação de colinearidade, ficamos com o seguinte modelo funcional:

$$f_x = x_A - x_0 - \delta_x - \delta_{xI} - f \frac{m_{11}(X-X_0) + m_{12}(Y-Y_0) + m_{13}(Z-Z_0)}{m_{31}(X-X_0) + m_{32}(Y-Y_0) + m_{33}(Z-Z_0)} = 0$$

$$f_y = y_A - y_0 - \delta_y - \delta_{yI} - f \frac{m_{21}(X-X_0) + m_{22}(Y-Y_0) + m_{23}(Z-Z_0)}{m_{31}(X-X_0) + m_{32}(Y-Y_0) + m_{33}(Z-Z_0)} = 0$$

(03)

onde:  $[x,y]^T$  são as coord. fotogramétrica do ponto no espaço imagem;  
 $[x_0,y_0]^T$  são as coord. fotogramétrica do ponto principal da foto;  
 $[x_A,y_A]^T$  são as coord. fotogramétrica ajustadas do ponto;  
 $[X, Y, Z]^T$  são as coord. do ponto no espaço objeto no sistema local;  
 $[X_0,Y_0,Z_0]^T$  são as coord. da estação de exposição;  
 $f$  é a distância focal calibrada (negativa para o diapositivo);  
 $m_{ij}$  são os elementos da matriz de rotação  $M=R_Z(K)R_Y(\phi)R_X(\varpi)$ ;  
 $\varpi$  é a rotação primária no eixo OX;  
 $\phi$  é a rotação secundária no eixo OY e  
 $K$  é a rotação terciária no eixo OZ.

## 2.2 MODELO ORTOGONAL

O modelo ORTOGONAL utiliza a condição de que os parâmetros não têm correlação entre si. Fato este que não ocorre entre os parâmetros do modelo de CONRADY-BROWN, contudo não existe um sentido físico para os parâmetros do modelo ORTOGONAL.

Os polinômios ortogonais podem ser vistos como um caso especial dos harmônicos esféricos tridimensionais (EL-HAKIM (1979)).

$$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm} P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\lambda) + B_{nm} P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\lambda)]$$

(05)

onde:  $r$ ,  $\theta$  e  $\lambda$  são representados na FIGURA (01) e:

$$P_{nm} \cos\theta = \left( \sin^2\theta \right)^{m/2} \frac{d^n P_n(\cos\theta)}{d \cos\theta^n}$$

(06)

é a função associada de Legendre de ordem  $m$  e grau  $n$ , enquanto  $P_n$  são conhecidos como polinômios de Legendre:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\cos^2\theta - 1)}{d\cos\theta^n} \quad (07)$$

Sendo o plano XY representativo do plano da fotografia, então  $\theta = 90^\circ$  para todos os pontos imagem. Pode-se então escrever a fórmula 05 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(r, 90^\circ, \lambda) = & A_{00} P_{00}(\cos\theta) + r \left[ A_{10} P_{10}(\cos\theta) \cos(0\lambda) + B_{10} P_{10}(\cos\theta) \sin(0\lambda) + \right. \\ & \left. A_{11} P_{11}(\cos\theta) \cos\lambda + B_{11} P_{11}(\cos\theta) \sin\lambda \right] \\ & + r^2 \left[ A_{20} P_{20}(\cos\theta) \cos(0\lambda) + B_{20} P_{20}(\cos\theta) \sin(0\lambda) + \right. \\ & \left. A_{21} P_{21}(\cos\theta) \cos\lambda + B_{21} P_{21}(\cos\theta) \sin\lambda + \right. \\ & \left. A_{22} P_{22}(\cos\theta) \cos(2\lambda) + B_{22} P_{22}(\cos\theta) \sin(2\lambda) \right] \\ & + r^3 \left[ A_{30} P_{30}(\cos\theta) \cos(0\lambda) + B_{30} P_{30}(\cos\theta) \sin(0\lambda) + \right. \\ & \left. A_{31} P_{31}(\cos\theta) \cos(\lambda) + B_{31} P_{31}(\cos\theta) \sin(\lambda) + \right. \\ & \left. A_{32} P_{32}(\cos\theta) \cos(2\lambda) + B_{32} P_{32}(\cos\theta) \sin(2\lambda) + \right. \\ & \left. A_{33} P_{33}(\cos\theta) \cos(3\lambda) + B_{33} P_{33}(\cos\theta) \sin(3\lambda) \right] \end{aligned} \quad (08)$$

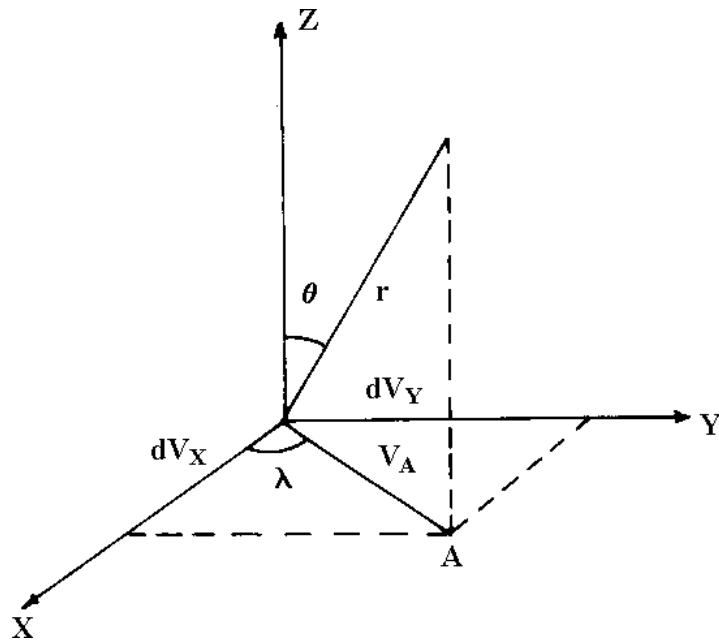


FIGURA 01: VARIÁVEIS ENVOLVIDAS NA EQUAÇÃO 05.

com:

$$P_{00}(\cos\theta) = 1$$

$$P_{10}(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_{11}(\cos\theta) = \sin\theta$$

$$P_{20}(\cos\theta) = 3/2(\cos^2\theta - 1/3)$$

$$P_{21}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_{22}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

$$P_{30}(\cos\theta) = 5/2(\cos^3\theta - (3/5)\cos\theta)$$

$$P_{31}(\cos\theta) = 15/2(\sin\theta)(\cos^2\theta - 1/5)$$

$$P_{32}(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta$$

$$P_{33}(\cos\theta) = 15\sin^3\theta$$

Para  $\theta = 90^\circ$ , temos;

$$\begin{aligned}
V(r, 90^\circ, \lambda) = & A_{00} + r[A_{11}\cos\lambda + B_{11}\sin\lambda] \\
& + r^2[A_{20} + A_{22}\cos(2\lambda) + B_{22}\sin(2\lambda)] \\
& + r^3[A_{31}\cos(\lambda) + B_{31}\sin(\lambda) + A_{33}\cos(3\lambda) + B_{33}\sin(3\lambda)]
\end{aligned}
\tag{09}$$

com:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad e \tag{10}$$

$$\lambda = \arctg\left[\frac{y - y_0}{x - x_0}\right] \tag{11}$$

Introduzindo as componentes na direção em x e y,  $dV_X$  e  $dV_Y$ , na equação de colinearidade (03), teremos:

$$f_X = x_A - x_0 + dV_X - f \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = 0$$

$$f_Y = y_A - y_0 + dV_Y - f \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = 0 \tag{11}$$

EL-HAKIM (1979), demonstrou que o parâmetro  $A_{00}$  devido a correlação com  $x_0$  e  $y_0$  deveria ser alterado. Como a modificação  $A_{00}r$  no lugar de  $A_{00}$ , mostrou-se satisfatória, a fórmula definitiva se escreve:

$$dV_X = (x - x_0) \left[ \begin{aligned} & A_{00} + A_{11}\cos\lambda + B_{11}\sin\lambda + A_{20}r + A_{22}r\cos(2\lambda) + \\ & B_{22}r\sin(2\lambda) + A_{31}r^2\cos(\lambda) + B_{31}r^2\sin(\lambda) + \\ & A_{33}r^2\cos(3\lambda) + \dots \end{aligned} \right] \tag{12}$$

$$dV_Y = (y - y_0) \left[ \begin{aligned} & A_{00} + A_{11}\cos\lambda + B_{11}\sin\lambda + A_{20}r + A_{22}r\cos(2\lambda) + \\ & B_{22}r\sin(2\lambda) + A_{31}r^2\cos(\lambda) + B_{31}r^2\sin(\lambda) + \\ & A_{33}r^2\cos(3\lambda) + \dots \end{aligned} \right] \tag{13}$$

Após a obtenção das derivadas das equações (12) e (13) com relação aos parâmetros  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $A_{00}$ ,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ ,  $A_{20}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{22}$ ,  $A_{31}$ ,  $B_{31}$  e  $A_{33}$ , procedeu-se às alterações pertinentes ao programa de fototriangulação do Prof. PhD José Bittencourt de Andrade modificado pela Prof<sup>a</sup> Mary Angélica de Azevedo Olivas (1980). As alterações foram efetuadas nas equações que modelam os parâmetros de calibração, que passaram a ser:  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $f$ ,  $A_{00}$ ,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ ,  $A_{20}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{22}$ ,  $A_{31}$ ,  $B_{31}$ ,  $A_{33}$ .

### 3. CAMPO DE TESTE

Para comparação foi construído um campo um campo de teste com 117 pontos com precisão das coordenadas mostradas na tabela 1.

TABELA 1: DESVIO PADRÃO MÉDIO, MÁXIMO E MÍNIMO DO CAMPO DE TESTE

$\delta_x = 0,53\text{mm}$	$\delta_{\max} = 0,41\text{mm}$	$\delta_{\min} = 0,63\text{mm}$
$\delta_y = 0,30\text{mm}$	$\delta_{\max} = 0,21\text{mm}$	$\delta_{\min} = 0,49\text{mm}$
$\delta_z = 0,56\text{mm}$	$\delta_{\max} = 0,53\text{mm}$	$\delta_{\min} = 0,63\text{mm}$

Tendo a seguinte configuração mostrada na figura 2.

### 4. TESTES

Para verificar os dois modelos em questão, será empregado o método de câmeras convergentes com auto-calibração e fototriangulação em pontos, aqui chamados, de verificação, os quais servirão para comprovar a eficiência dos parâmetros recuperados da câmera.

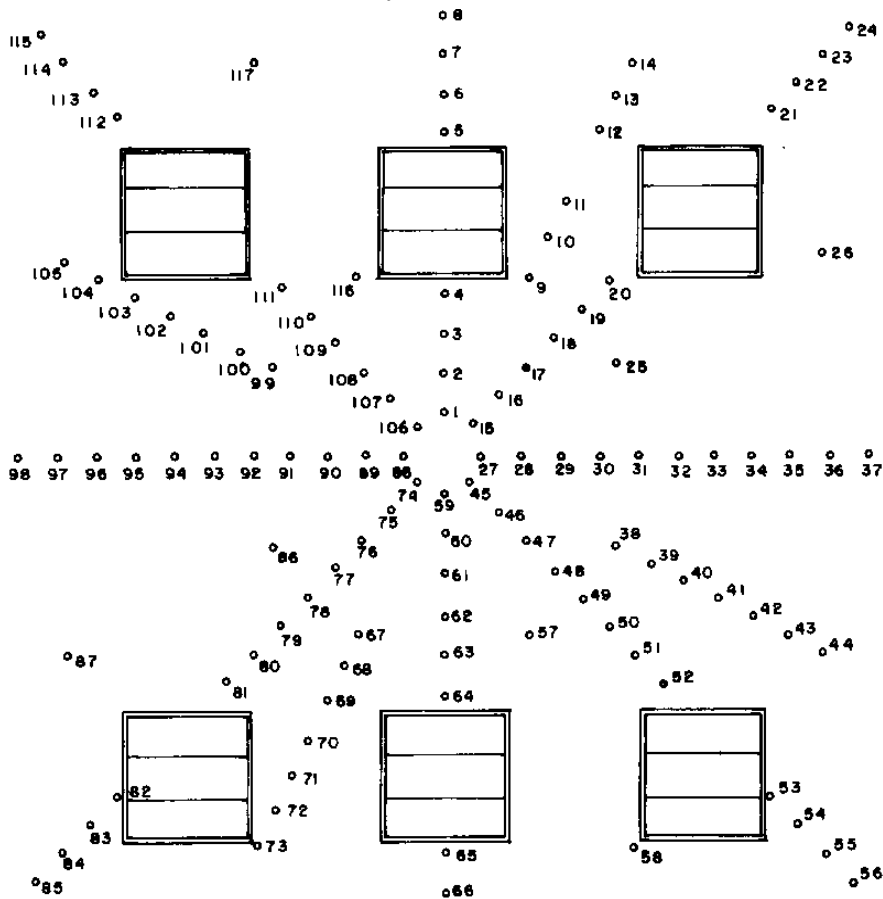
Este processo, será utilizado devido a sua proximidade com o emprego das câmeras semi-métricas em aplicações tanto no levantamentos de coordenadas, para determinação de deformações ou de volumes.

A câmera a ser empregada nos testes será a Rolleiflex 3003, com objetiva de focal nominal de 60,00mm. Esta câmera é equipada com um "reseau" contendo 35 marcas (cruzetas) que definem o sistema fiducial.

Os testes a serem executados apresentam as seguintes características:

- a) teste convergente com três fotos e três tipos de controle;
- b) teste convergente com cinco fotos e três tipos de controle.

FIGURA 2: CONFIGURAÇÃO DO CAMPO DE TESTE



Os testes realizados visam verificar qual o modelo que apresenta o menor resíduo médio quadrático em idênticas condições de ajustamento, ou seja, mesmo ponto de apoio, tipo de controle (item 4.2) e tomada fotográfica. KILPELA (1981) mostra a seguinte fórmula para o resíduo médio quadrático:



$$\mu_X = m \left[ \sum_{i=1}^l (X_P - X_G)_i^2 / l \right]^{1/2} \quad (\text{idem p / } \mu_Y \text{ e } \mu_Z)$$

$$\mu_{XY} = \left[ \frac{(\mu_X^2 + \mu_Y^2)}{2} \right]^{1/2}$$

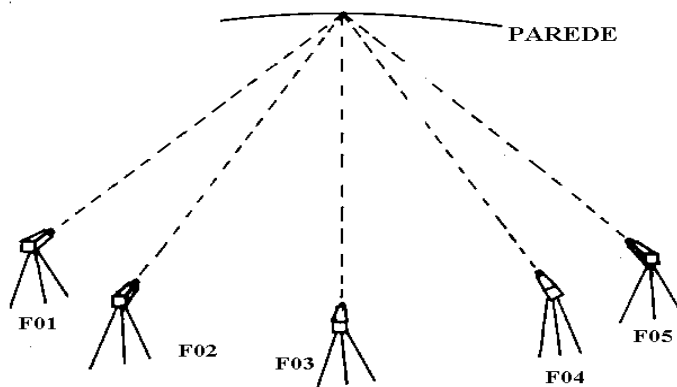
(04)

onde :  $\mu_X$  é o resíduo médio quadrático em x;  
 $\mu_Y$  é o resíduo médio quadrático em y;  
 $\mu_Z$  é o resíduo médio quadrático em z;  
 $\mu_{XY}$  é o resíduo médio quadrático em xy;  
m é escala nominal do conjunto de fotografia;  
 $X_P$  é a coordenada determinada por fototriangulação;  
 $X_G$  é a coordenada do campo de teste padrão (TABELA 2);  
l é número de pontos de verificação.

#### 4.1 OBTENÇÃO DAS FOTOGRAFIAS PARA COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS

Como adotou-se o método de câmeras convergentes foram utilizadas, como mostra a FIGURA 3, cinco estações para obter as fotografias convergentes (F01, F02, F03, F04 e F05).

FIGURA 3: TOMADA DE FOTOGRAFIAS PARA COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS

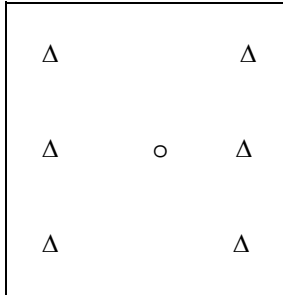


## 4.2 TIPOS DE CONTROLE

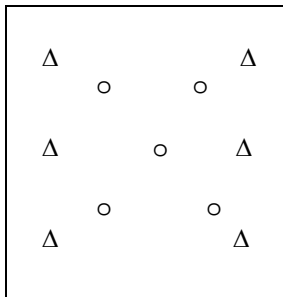
Foram empregados, neste trabalho, os seguintes tipos de controle: controle esparso (Fig. 4a), médio (Fig. 4b) e denso (Fig. 4c). Os pontos de apoio planialtimétricos (XYZ) estão representados por  $\Delta$  e os pontos altimétricos (Z) representados por  $\circ$ .

FIGURA 4: TIPOS DE CONTROLE

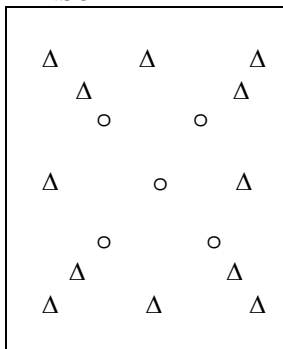
(a) ESPARSO



(b) MÉDIO



(c) DENSO



### 4.3 RESULTADOS

Com a aplicação da fórmula (04), nos pontos de verificação, obteve-se para cada teste os resultados descritos nos quadros abaixo (em milésimo de milímetro).

TABELA 2: RESULTADO DO TESTE COM 3 TOMADAS FOTOGRÁFICAS

CONTROLE	MODELO				No. de Ptos. de Verificação
	CONRADY-BROWN		ORTOGONAL		
	$\mu_{XY}$	$\mu_Z$	$\mu_{XY}$	$\mu_Z$	
ESPARSO	20,82	21,21	5,94	9,53	91
MÉDIO	20,31	14,30	5,88	7,34	
DENSO	16,42	11,39	5,21	6,11	

TABELA 3: RESULTADO DO TESTE COM 5 TOMADAS FOTOGRÁFICAS

CONTROLE	MODELO				No. de Ptos. de Verificação
	CONRADY-BROWN		ORTOGONAL		
	$\mu_{XY}$	$\mu_Z$	$\mu_{XY}$	$\mu_Z$	
ESPARSO	18,52	27,36	9,47	13,81	96
MÉDIO	18,24	19,82	9,11	9,80	
DENSO	16,60	17,51	7,31	6,86	

### 5. CONCLUSÕES

Durante o estudo e a realização do trabalho ora exposto foi construído um campo de teste, com 117 pontos, para calibração de câmeras métricas, semi-métricas ou não métricas, além da implementação de uma nova modelagem para correção dos parâmetros de calibração, que se pode contar como mais uma alternativa de calibração dentro do meio científico.

Como conclusões mais importantes, pode-se relacionar:

- Que o modelo ORTOGONAL demonstrou em todos os testes convergentes ser mais eficaz que o modelo de CONRADY-BROWN;
- O aumento na densidade de pontos verticais, controle médio, não implicou em uma diminuição dos resíduos X e Y no modelo ORTOGONAL e

c) Para efeito de calibração o aumento no número de fotografias, de 3 para 5, mostrou uma diminuição dos resíduos para o modelo de CONRADY-BROWN, contudo mesmo havendo um aumento nos resíduos do modelo ORTOGONAL, este ainda obteve o melhor resultado.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 BROWN, D. C. Decentering distortion of lenses. Photogrammetric Engineering, v. 32, n. 3, p 444-462, May 1966.
- 2 EL-HAKIM, S. F. Potentials and limitations of photogrammetry for precision surveying. New Brunswick, 1979, 168p. Dissertation (Ph. D.) - Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick. (Technical report).
- 3 KILPELA, E. Compensation of systematic errors of image and model coordinates. Photogrammetria, v.37, p. 15-44, 1981
- 4 OLIVAS, M. A. A.. Calibração de Câmaras Fotogramétricas; Aplicação dos Métodos: Câmaras Convergentes e Campos Mistos. - Curitiba, 1980. 98 p. Dissertação (Mestrado em Fotogrametria - CPGCG), UFPR.

(Recebido em 14/06/96. Aceito para publicação em 22/08/96.)