

# MODELAGEM DO ERRO DE CENTRAGEM NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL $R^3$

*Modeling of centering errors on the on the three-dimensional space ( $R^3$ ).*

JAIR MENDES MARQUES

Universidade Tuiuti do Paraná  
Rua Marcelino Champagnat,505 – CEP 80710-250  
Curitiba – PR  
jair.marques@utp.br

Universidade Federal do Paraná  
Centro Politécnico – Jardim das Américas  
Curitiba - PR

## RESUMO

O objetivo deste trabalho consistiu no desenvolvimento da modelagem do erro de centragem de instrumentos Geodésicos e Topográficos sobre o espaço tridimensional ( $R^3$ ). O desenvolvimento da função densidade conjunta de probabilidade, que é uma ampliação da distribuição de Rayleigh no espaço bidimensional ( $R^2$ ), permite uma análise do comportamento dos erros de centragem. O estudo mostra também que o Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) fornece melhor resultado para a estimação da variância. É realizada uma simulação dos resultados no Matlab.

**Palavras chaves:** distribuição de Rayleigh no  $R^3$ , centragem de instrumentos, erros de centragem.

## ABSTRACT

This work aims at developing of the modeling of centering errors of Geodetic and Topographical instruments on the three-dimensional space ( $R^3$ ). The development of the joint probability density function, that is an extension of the Rayleigh distribution in the two-dimensional space ( $R^2$ ), allows for an analysis of the behavior of centering errors. The study also shows that the Maximum Likelihood Estimator (MLE) presents the best result for the estimation of the variance. A simulation of the results is accomplished with the use of Matlab.

**Keywords:** Rayleigh distribution in the  $R^3$ , centring of instrument, centring errors.

## 1. INTRODUÇÃO

Sabe-se que a distribuição de Rayleigh (Bickel; Docksun, 1977) permite a modelagem dos erros de centragem de instrumentos de alta precisão levando-se em consideração que os erros variam segundo direções, que podem ser mensurados por duas componentes (Patterson, 1979). Com o presente estudo pôde-se generalizar a distribuição segundo três direções, ou seja, estudar o comportamento dos erros de centragem sobre o espaço vetorial euclidiano tridimensional ( $R^3$ ).

A distribuição de Rayleigh é gerada a partir de uma função densidade de probabilidade normal bidimensional (Marques, 1999), considerando que os erros de centragem do instrumento independe das direções de X e Y e com uso de coordenadas polares, obtém-se a distribuição conjunta de r e  $\theta$  dada por (White, 1977)

$$g(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1.1)$$

cuja função marginal de r é

$$h(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0 \quad (1.2)$$

conhecida como distribuição de Rayleigh.

## 2. O MODELO PROBABILÍSTICO NO $R^3$

Suponha-se que o ponto P de centragem do instrumento tenha coordenadas  $(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ , onde  $\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$  e  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ , tal que os erros de centragem sejam independentes nas três direções, com mesmo desvio padrão. A função densidade de probabilidade normal conjunta do vetor aleatório  $(x, y, z)$  é

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2 + z^2)\right], \quad (2.1)$$

$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty.$

Considerando-se a transformação de coordenadas  $x = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$ ,  $y = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi$ ,  $z = r \cdot \sin \phi$ , a função densidade de probabilidade do vetor aleatório  $(r, \theta, \phi)$  é dada por

$$g(r, \theta, \phi) = |J(r, \theta, \phi)| \cdot f[G_1(r, \theta, \phi), G_2(r, \theta, \phi), G_3(r, \theta, \phi)]$$

onde

$$\begin{aligned} & f[G_1(r, \theta, \phi), G_2(r, \theta, \phi), G_3(r, \theta, \phi)] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \cos^2\phi + r^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos^2\phi + r^2 \cdot \sin^2\phi)\right] \\ &= r^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |J(r, \theta, \phi)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta \cdot \cos\phi & -r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi & -r \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi \\ \sin\theta \cdot \cos\phi & r \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi & -r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \\ \sin\phi & 0 & r \cdot \cos\phi \end{vmatrix} = r^2 \cdot \cos\phi \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} g(r, \theta, \phi) &= |J(r, \theta, \phi)| \cdot f[G_1(r, \theta, \phi), G_2(r, \theta, \phi), G_3(r, \theta, \phi)] \\ &= \frac{r^2 \cdot \cos\phi}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A função densidade marginal de  $r$  é

$$\begin{aligned} h(r) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cdot \cos\phi}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) d\theta d\phi = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \\ r &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

equivalente à distribuição de Rayleigh (1.2) para os erros de centragem no  $R^3$ , com parâmetros

$$E(r) = \int_0^{\infty} r \cdot \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sigma \quad (2.4)$$

$$V(r) = E(r^2) - [E(r)]^2 = 3\sigma^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sigma\right)^2 = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \cdot \sigma^2 \quad (2.5)$$

onde:

$$E(r^2) = \int_0^{\infty} r^2 \cdot \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr = 3\sigma^2 \quad (2.6)$$

De acordo com as expressões (2.4) e (2.5) tem-se que

$$E(r) = 1,5958 \sigma \quad \text{e} \quad V(r) = 0,4535 \sigma^2.$$

Pode-se verificar que as variáveis aleatórias  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são independentes, pois, de acordo com (2.3)

$$h_1(r) = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0,$$

e ainda

$$h_2(\theta) = \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \cdot \cos\phi}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) d\phi dr = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$h_3(\phi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cdot \cos\phi}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) d\theta dr = \frac{\cos\phi}{2}, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2,$$

resultando em

$$h_1(r) \cdot h_2(\theta) \cdot h_3(\phi) = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos\phi}{2} =$$

$$\frac{r^2 \cdot \cos\phi}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) = g(r, \theta, \phi),$$

garantindo assim a independência entre elas.

### 3. O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA (EMV) DE $\sigma^2$

A função de verossimilhança de (2.3) é dada por

$$L(r_1, r_2, \dots, r_n; \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{2r_i^2}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \ln 2^n + \sum_{i=1}^n \ln r_i^2 - \ln (2\pi)^{n/2} - \ln \sigma^{3n} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n r_i^2$$

que derivando em relação à variância  $\sigma^2$

$$\frac{\partial L(r_1, r_2, \dots, r_n; \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{3n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n r_i^2,$$

com

$$-\frac{3n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^n r_i^2 = 0,$$

resulta em

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n r_i^2. \quad (3.1)$$

### 4. PROPRIEDADES DO EMV de $\sigma^2$

(1) Estimador não-viciado

*Prova:*

Deve-se provar que  $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ .

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n r_i^2\right) = \frac{1}{3n} E\left(\sum_{i=1}^n r_i^2\right) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n E(r_i^2) = \frac{1}{3n} \cdot n \cdot E(r^2),$$

e de acordo com o resultado (2.6) tem-se que

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{3n} \cdot n \cdot E(r^2) = \frac{1}{3n} \cdot n \cdot 3\sigma^2 = \sigma^2$$

(2) Estimador consistente

*Prova:*

Como

$$\begin{aligned} V(\hat{\sigma}^2) &= V\left(\frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n r_i^2\right) = \frac{1}{9n^2} V\left(\sum_{i=1}^n r_i^2\right) = \frac{1}{9n^2} \sum_{i=1}^n V(r_i^2) \\ &= \frac{1}{9n^2} \cdot n \cdot V(r^2) = \frac{1}{9n^2} \cdot n \cdot 6\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{3n}, \end{aligned}$$

onde  $V(r^2) = E(r^4) - [E(r^2)]^2 = 15\sigma^4 - 9\sigma^4 = 6\sigma^4$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\sigma}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^4}{3n} = 0.$$

(3) Estimador de variância mínima

*Prova:*

Não existe outro estimador não-viciado de  $\sigma^2$  que tenha variância menor. Como

visto, a variância de  $\hat{\sigma}^2$  é  $\frac{2\sigma^4}{3n}$ . Os outros possíveis estimadores são o estimador de mínimos quadrados dado por

$\bar{\sigma}^2 = \frac{\pi}{(3\pi - 8)(n - 1)} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2$  que é um estimador não-viciado de  $\sigma^2$  com

variância  $V(\bar{\sigma}^2) > V(\hat{\sigma}^2)$  e o estimador obtido pelo Método dos Momentos

resulta em um estimador viciado dado por  $*\hat{\sigma}^2 = \frac{\pi}{8n^2} \left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^2$  e ainda com

variância  $V(*\hat{\sigma}^2) > V(\hat{\sigma}^2)$ .

## (4) Estimador suficiente

*Prova:*

Basta provar que  $h(\mathbf{r}; \sigma^2) = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ , ou seja, a função densidade da variável aleatória  $\rho$  com parâmetro  $\sigma^2$ , pertence à família exponencial uniparamétrica (Moody; Graybill, 1986).

Portanto

$$h(\mathbf{r}; \sigma^2) = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(\sigma^2)^{3/2}} \cdot \exp\left(-r^2 \cdot \frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

onde pode-se fazer :  $a(\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^{3/2}}$ ,  $b(\mathbf{r}) = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $c(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^2}$  e

$d(\mathbf{r}) = -r^2$ , ou seja,

$h(\mathbf{r}; \sigma^2) = a(\sigma^2) b(\mathbf{r}) \exp[c(\sigma^2)d(\mathbf{r})]$  pertence à família exponencial uniparamétrica, sendo  $\sigma^2$  esse parâmetro único.

## 5. SIMULAÇÃO

Considere uma amostra aleatória de  $n = 100$  pontos gerados a partir da distribuição (2.3), com desvio padrão para a distribuição normal tridimensional igual a 1 cm. A figura 5.1 mostra a distribuição desses pontos com ponto de centragem na origem do sistema de coordenadas.

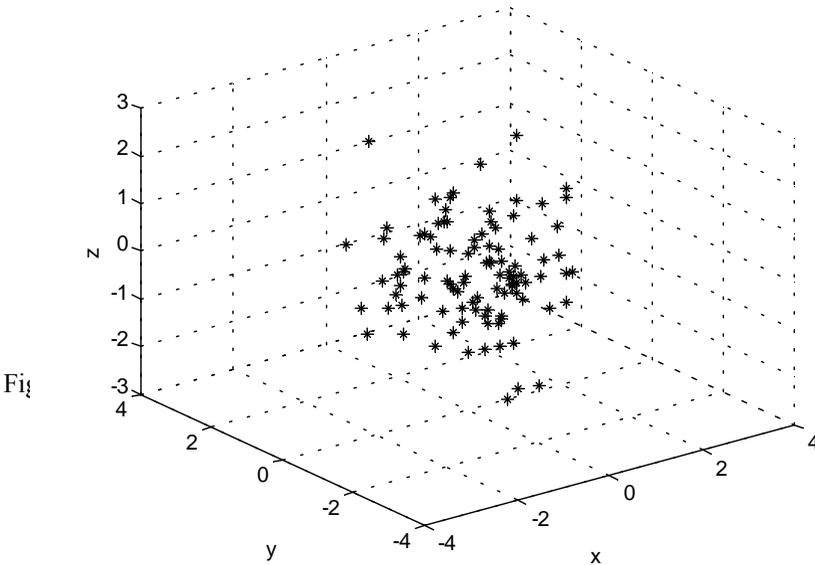
A distribuição (2.3) nesse caso tem como média

$$E(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sigma = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot 1 = 1,60 \quad (5.1)$$

e variância

$$V(\mathbf{r}) = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \cdot \sigma^2 = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \cdot 1^2 = 0,45 \quad (5.2)$$

Figura 5.1 – Dispersão de n = 100 pontos



Para a amostra gerada o valor estimado de  $E(r)$  é de aproximadamente 1,48 cm, enquanto que o valor estimado de  $V(r)$ , de acordo com o EMV é  $0,8538 \text{ cm}^2$ . Para a simulação realizada, considerando-se apenas o erro de centragem, e uma distância média de 200 m e desvio padrão de 1 cm, os resultados obtidos são mostrados no quadro 5.1. Na amostra obtida, o desvio padrão estimado da distância foi de 0,9658 cm.

A variância total da distância será dada por

$$V(\text{Total}) = \sigma_L^2 + \sigma^2 \tag{5.3}$$

onde  $\sigma_L^2$  é a variância da distância e  $\sigma^2$  é a variância do erro de centragem do instrumento.

Portanto, a variância total estimada será dada por

$$\hat{V}(\text{Total}) = \hat{\sigma}_L^2 + \hat{\sigma}^2 = 0,9328 + 0,8538 = 1,7866 \text{ cm}^2.$$

Quadro 5.1 – Resultados da simulação para  $n = 100$ ,

Nível de confiança de 95%

Distância (sem erro de centragem)	Distância (com erro de centragem)
Máximo = 200,0019	Máximo = 200,0026
Mínima = 199,9981	Mínimo = 199,9974

## 6. CONCLUSÃO

O desenvolvimento teórico realizado permite modelar o erro de centragem no espaço tridimensional ( $R^3$ ) através da distribuição de Reyleigh, dependendo variância  $\sigma^2$  como parâmetro. O estudo da estimativa desse parâmetro permitiu obter, como melhor alternativa para ele, o Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV).

Analisando os resultados da simulação, verifica-se que o erro de centragem propaga-se para a medida da distância fazendo com que a mesma tenha um erro adicional acrescentado ao erro de medida do instrumento.

## REFERÊNCIAS

- BICKEL, P.J.; DOCKSUN, K. A . **Mathematical statistics**. San Francisco: Holden-Day, 1977.
- MARQUES, J. M. Análise estatística dos erros de centragem e pontaria. **Boletim Geodésico**, UFPR, v. 5, n. 8, p. 45-67, Dezembro 1999.
- MOOD A. M.; GRAYBILL F.; BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**, McGraw-Hill Book Company., 17<sup>a</sup> imp., 1986.
- PATTERSON, R. Estimation of the variance of centring errors. **The Australian Surveyor**, v. 29, n. 6, p. 365-374, June 1979.
- WHITE, L. A. Distribution of centring. **The Australian Surveyor**, v. 28, n. 8, December 1977.

(Recebido em novembro/03. Aceito em maio/04.)