CRITÉRIOS PARA A ANÁLISE DA GEOMETRIA DE REDES GEODÉSICAS POR COMPONENTES PRINCIPAIS

Criteria for analysing geodetic network geometry by means of main components

REGINALDO DE OLIVEIRA
QUINTINO DALMOLIN

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências da Terra
Departamento de Geomática
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
e-mail: qdalmolin@ufpr.br

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar o comportamento da matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados de uma rede geodésica a partir da configuração geométrica dada pelas suas componentes principais. Compara-se os resultados obtidos com os parâmetros aproximados iniciais e os parâmetros ajustados finais com o intuito de avaliar a influência da estimativa dos valores iniciais em situação de planejamento de redes geodésicas. O teste de esfericidade com os critérios de otimalidade foi aplicado ao conjunto de valores próprios a fim de verificar se a rede sob análise apresenta as características de homogeneidade e isotropismo.

ABSTRACT

This paper aims at analysing the variance-covariance matrix behaviour of parameters which are adjusted to a geodetic network from geometric configuration obtained by its principal components. The results obtained with the first parameters are compared to the results obtained by the last parameters, aiming at evaluating the estimative influence of the first results in relation to geodetic network. A spherical test with optimization criteria was applied to the group of eigenvalues so as to check whether or not the network under analysis presents characteristics of homogenity and isotropism.

1. INTRODUÇÃO

A análise de componentes principais é baseada na estrutura da matriz variância-covariâncias de um conjunto de p de variáveis, através de k, ($k < p$) combinações destas variáveis. O conjunto de variáveis originais é transformado em um novo conjunto de variáveis não correlacionadas chamadas componentes principais. Essas novas variáveis são combinações lineares das variáveis originais e são derivadas em ordem decrescente de importância. Assim sendo, a primeira componente principal é a combinação linear normalizada com variância máxima.

Seu objetivo é em geral:

(1) reduzir o número de variáveis e
(2) analisar quais conjuntos de variáveis explicam a maior parte da variabilidade total revelando que tipo de relacionamento existe entre elas.

Algebricamente, as componentes principais são combinações lineares de p variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Geometricamente estas combinações lineares representam a seleção de um novo sistema de coordenadas obtido rotacionando o sistema original que possui $X_1, X_2, \ldots, X_p$ como eixos coordenados . Os novos eixos representam as direções com máxima variabilidade e fornecem uma descrição da estrutura de covariância.

Componentes principais dependem da matriz covariância Σ de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ e seu desenvolvimento não requer suposição de normalidade. Por outro lado, componentes principais obtidas de população normal multivariada podem ser interpretadas em termos de elipsóide, ou hiper-elipsóide de confiança.

As componentes principais podem ser úteis em Ciências Geodésicas em aplicações como:

(a) detecção e identificação de *outliers* (MARQUES, 1994), isto é, identificação de observações que apresentam inconsistência com o resto dos dados;
(b) fornecer elementos que possibilitem compor modelos de análise da sensibilidade de uma rede geodésica (NIEMEIER, 1985 a)
(c) obter elementos de otimização para as redes na detecção de movimentos da crosta terrestre (CROSSILA e MARCHESINI, 1983)

Na questão da análise de redes geodésicas o interesse maior recai sobre o significado geométrico das componentes principais. No presente trabalho usar-se-á o termo componentes principais para a representação geométrica das mesmas.

2. VALORES E VETORES PRÓPRIOS

Dois tipos de Problema de Valor Próprio são definidos: o Problema de Valor Próprio especial e o Problema de Valor Próprio generalizado (ZURMÜHL, 1950, p.120).

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , sobre R (conjunto dos números reais). Diz-se que um escalar $\lambda \in R$ é um valor próprio de A se existe um vetor não nulo $\mathbf{m} \in R$ para o qual

$$(A-\lambda I)m = 0,\ m \neq 0 \tag{1}$$

Os valores próprios e vetores próprios de A são exatamente aqueles que satisfazem a equação (1).

Assim, a única maneira de serem obtidos vetores próprios m, com $m \neq 0$ é ter

$$\det[(A-\lambda.I)]=0 \tag{2}$$

Impondo a condição (2), determina-se, primeiramente, os valores próprios λ que satisfazem a equação (1) e, depois, os vetores próprios a eles associados.
Tem-se o polinômio característico da matriz A,

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda.I) \tag{3}$$

$$P(\lambda) = (a_{11}-\lambda).(a_{22}-\lambda)...(a_{nn}-\lambda) + \text{termos de grau menor que n} \tag{4}$$

$P(\lambda)$ é chamado polinômio característico da matriz A e o conjunto de todos os valores próprios da matriz A, é chamado de espectro de A.

Os vetores próprios são determinados após a substituição do valor próprio em (1). O vetor próprio, associado a um valor próprio, não é único, ou seja, se m_i é um vetor próprio, qualquer escalar c multiplicado por m_i será solução de (1). Obtém-se os vetores próprios normalizados pela normalização $\mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_i = 1$.

Os vetores próprios desta forma normalizados são chamados versores.

Se ao invés da matriz identidade em (1) tivermos uma matriz C, haverá como ampliação do valor próprio especial, o Problema de Valor Próprio geral definido por:

$$(A - \lambda C)m = 0, \tag{5}$$

em que A e C possuem as mesmas dimensões, n x n. Em particular, no caso em que C for não-singular será possível reconduzir (5) a um Problema de Valor Próprio especial. Com efeito,pré-multiplicando direita ambos os membros de (5) por C^{-1}

$$(C^{-1}A-\lambda C^{-1}C)m = 0, \tag{6}$$

fazendo $C^{-1}A = D$ e ainda como $C^{-1}C = I$ tem-se

$$(D-\lambda I)m = 0 \tag{7}$$

3. MATRIZ COVARIÂNCIA E ELIPSE DE ERROS

Parte das informações a respeito da precisão de uma rede geodésica está contida na matriz covariância do vetor dos parâmetros ajustados

$$\Sigma_{xa} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_x \tag{8}$$

onde

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^t\mathbf{PA})^+ \tag{9}$$

O sinal " + " indica a pseudo-inversa e $\mathbf{Q}_X$ é chamado de matriz dos cofatores de variância.

Toda modificação realizada na geometria da rede e na precisão das medidas interfere diretamente sobre a equação (9) e desta forma os critérios de análise recaem sobre esta matriz.

Uma representação gráfica para $\mathbf{Q}_X$, (figura 1), pode ser obtida através da expressão,

$$(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q}_X^+ (\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}) = c^2 \tag{10}$$

que representa a equação de um grupo de elipses ou elipsóides centrados em $\hat{x}$, na qual o grupo de parâmetros c é relacionado à distribuição qui quadrado dado por,

$$c^2 = \chi^2_{u,1-\alpha} \tag{11}$$

onde u é o número de parâmetros e α é o nível de significância.

A expressão dos semi eixos a e b , e do ângulo Θ de orientação da elipse são dadas por (MORAES, 2001,p.186)

$$a = \sigma_{max} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i} + W)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{max}} \tag{12}$$

$$b = \sigma_{min} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i} - W)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{min}} \tag{13}$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{y_i x_i}}{q_{x_i x_i} - q_{y_i y_i}}$$

em que

$$W = \sqrt{(q_{y_i y_i} - q_{x_i x_i})^2 + 4q^2_{y_i x_i}} \quad \text{e}$$

$q_{x_i x_i}$, $q_{y_i y_i}$ e $q_{x_i y_i}$ são as variância e covariâncias das variáveis aleatórias x_i e y_i .

O ângulo Θ , (com $\Theta \leq \pi$) é o azimute da direção do semi eixo a e $\Theta + \pi/2$ é o azimute da direção do semi eixo b.

4. REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA DAS COMPONENTES PRINCIPAIS

A decomposição de uma matriz quadrada em valores próprios λ_i e vetores próprios $\mathbf{m}_i$ é chamada de decomposição espectral. A decomposição espectral da matriz dos cofatores de covariância é representada por:

$$\mathbf{Q}_X = \mathbf{M \Lambda M}^t \tag{14}$$

onde

M é a matriz ortogonal cujas colunas são vetores próprios de $\mathbf{Q}_X$

Λ é a matriz diagonal formada pelos valores próprios de $\mathbf{Q}_X$

Então,

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1u} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2u} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{u1} & m_{u2} & \cdots & m_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1u} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2u} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{u1} & m_{u2} & \cdots & m_{uu} \end{bmatrix}^t \tag{15}$$

Entre os valores próprios de $\mathbf{Q}_X$ existe a seguinte relação $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_u$.

A partir da decomposição espectral de $\mathbf{Q}_X$ determina-se a decomposição espectral de Σ_{Xa}, visto que estas duas matrizes possuem os mesmos vetores próprios e os valores próprios se diferenciam pelo fator de variância da unidade de peso a posteriori. Os valores próprios de Σ_{Xa} são $\hat{\sigma}_0^2\lambda_1 \geq \hat{\sigma}_0^2\lambda_2 \geq \cdots \geq \hat{\sigma}_0^2\lambda_u$.

Através da (15) obtém-se um hiperelipsóide de dimensão $u \times u$, onde os semi-eixos ficam definidos pelos vetores próprios e a primeira componente principal é dada segundo (NIEMEIER, 1982, p. 277) por:

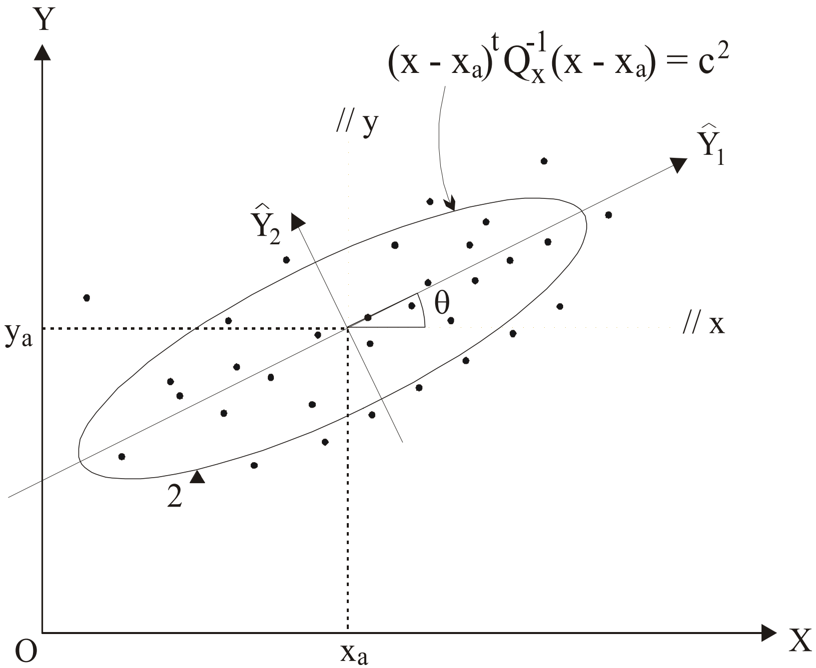
$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_1\sqrt{\lambda_1} \tag{16}$$

Com base na (16) observa-se que $\sqrt{\lambda_1}$ fixa o comprimento do semi eixo maior do elipsóide de erros dado pela (15), visto que $\mathbf{m}_1$ é um vetor unitário.

Por definição duas ou mais componentes principais são independentes entre si, visto que cada componente principal tem na sua formação vetores próprios que são independentes entre si. Para as redes geodésicas significa a direção θ nas quais os parâmetros são pior determinados (figura 1).

A interpretação geométrica da primeira componente principal, dada na figura 1, é a representação unidimensional do semi-eixo maior de comprimento $\sqrt{\lambda_1}$ de um elipsóide de confiança, e os elementos de $\mathbf{m}_1$ são os cossenos diretores da projeção destes em relação à base original. Estatisticamente a primeira componente principal fornece a máxima separação possível entre as variáveis e esta separação é encontrada na direção fornecida pela orientação do vetor $\mathbf{m}_1$, ou seja, a máxima variância λ_1 se encontra nesta direção.

FIGURA 1 - REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA DAS COMPONENTES PRINCIPAIS PARA O CASO



BIVARIADO

Fonte: Adaptada de Moraes (2001, p.130)

5. CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE

A acurácia de uma rede é tanto melhor quanto menor for o valor próprio máximo obtido da matriz $\mathbf{Q}_X$. WELSH et al. (1980b, p57) apresenta alguns dos mais importantes critérios de optimalidade para redes geodésicas :

$$\det(\mathbf{Q}_X) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_i \times \ldots \times \lambda_u = \prod_{i=1}^{u} \lambda_i \overset{!}{=} \text{mínimo} \tag{17}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_X) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_u = \sum_{i=1}^{u} \lambda_i \overset{!}{=} \text{mínimo} \tag{18}$$

$$\lambda_{\text{máximo}} \overset{!}{=} \text{mínimo} \tag{19}$$

$$\frac{\lambda_{máximo}}{\lambda_{mínimo}} \overset{!}{=} 1 \tag{20}$$

$$\lambda_{máximo} - \lambda_{mínimo} \overset{!}{=} mínimo \tag{21}$$

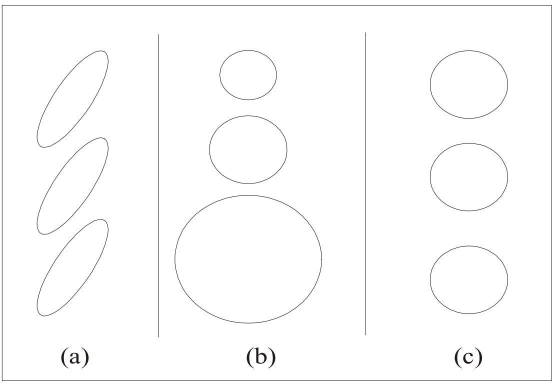
$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{máximo}} \tag{22}$$

A condição (17) é denominada critério volume de confiança e deve ser mínimo. A expressão (18) significa que a soma dos quadrados dos semi eixos deve ser mínima. A expressão (17) apesar de ser um dos critérios tem a desvantagem de que eixos isolados podem ser muito grandes, então como condição adicional usa-se a condição (18). A condição (19) significa que o quadrado do semi-eixo maior deve ser mínimo. A condição (20) é conhecida como a condição de isotropia, ou seja, a medida de acurácia do ponto é a mesma em todas as direções. A (21) é a condição de homogeneidade, ou seja, as elipses se degeneram em uma circunferência. A (22) fornece a direção e o comprimento do eixo principal do elipsóide de confiança em termos da primeira componente principal.

Segundo CROSSILLA e MARCHESI (1983, p. 308) de todas as possíveis configurações de uma rede geodésica a melhor é aquela que satisfaz as condições (17), (18) , (19) e (20).

Uma rede que é somente homogênea , figura 2 (a), as elipses (ou elipsóides) de erro locais são os mesmos em todos os pontos. Uma rede que é apenas isotrópica, figura 2 (b), as elipses (ou elipsóides) variam de ponto para ponto, embora sejam todas reduzidas a círculos (redes bi-dimensionais) ou esferas (redes tri-dimensionais). Assumindo-se uma rede geodésica bidimensional como sendo homogênea e isotrópica, figura 2 (c) , então as elipses de erro locais reduzem-se a círculos de mesmo raio.

FIGURA 2 – REDE HOMOGÊNEA E ISOTRÓPICA



6. TESTE DA IGUALDADE DE VALORES PRÓPRIOS

A fim de verificar se p valores próprios são iguais entre si sob o nível de significância α aplica-se o teste da igualdade de valores próprios, em um subconjunto contendo b valores próprios consecutivos (JACKSON, 1991, p. 86-87) cuja hipótese nula é:

$$H_0 : \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_{k+b}$$

e a estatística do teste é dada por:

$$\nu \left[-\sum_{j=k+1}^{k+b} \ln(\lambda_j) + b \ln\left(\sum_{j=k+1}^{k+b} \frac{\lambda_j}{b} \right) \right] \sim \chi^2_{(b-1)(b+2)/2} \tag{23}$$

na qual ν designa o número de graus de liberdade associado com a matriz covariância e χ^2 tem (b-1)(b+2)/2 graus de liberdade. Se a estatística calculada for maior que $\chi^2_{(b-1)(b+2)/2}$, para um determinado nível de significância a hipótese H_0 é rejeitada

Para o caso bivariado, o teste da igualdade dos valores próprios é dado por:

$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$

cuja estatística do teste é

$$F^* = \frac{(n-2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{8\lambda_1\lambda_2} \tag{24}$$

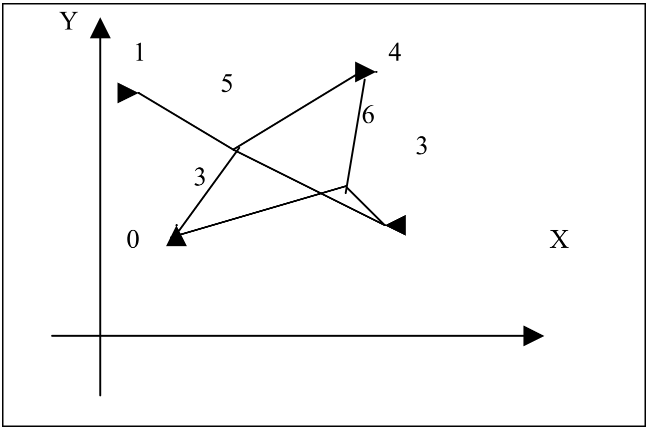
onde a estatística F^* a ser testada segue uma distribuição F central com o número de graus de liberdade no numerador igual a 2 e no denominador igual a $n-2$, sendo n o número de observações.

Com base no teste de igualdade de valores próprios acima citados pode-se tomar decisões quanto a qualidade da rede, visto que na prática os valores próprios da matriz de covariância dificilmente serão iguais em valores absolutos. Então pode-se testar, se as diferenças entre valores próprios de uma matriz de covariâncias são significativas.

7. APLICAÇÃO

Como aplicação ajustou-se uma rede horizontal a partir de 7 observações de distância (figura 3).

FIGURA 3 – REDE HORIZONTAL



As observações foram feitas com a mesma precisão ($\sigma_i = 1\,\text{mm}$). As coordenadas dos pontos fixos (considerados isentos de erro) e as coordenadas dos pontos aproximados são dados na tabela 1.

TABELA 1 – COORDENADAS DA REDE HORIZONTAL

Pontos	Coordenadas Fixas	
	x(m)	y(m)
1	8	44
2	19	17
3	57	24
4	48	52
Pontos	Coordenadas aproximadas	
5	26	36
6	44	31

A matriz covariância global e as submatrizes que fornecem subsídios para análise do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados e da qualidade da rede estão descritas abaixo.

$$\mathbf{Q}_X = (\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} 0.4040 & -0.0242 & 0 & 0 \\ -0.0242 & 0.6596 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6323 & -0.1015 \\ 0 & 0 & -0.1015 & 0.7394 \end{bmatrix},$$

As submatrizes que fornecem a situação da acurácia local são:

$$\mathbf{Q}_{x5} = \begin{bmatrix} 0.4040 & -0.0242 \\ -0.0242 & 0.6596 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q}_{x6} = \begin{bmatrix} 0.6323 & -0.1015 \\ -0.1015 & 0.7394 \end{bmatrix}$$

As matrizes que definem a decomposição espectral completa da matriz $\mathbf{Q}_X$ são,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.9956 & -0.0936 & 0 & 0 \\ 0.0936 & 0.9956 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8563 & -0.5166 \\ 0 & 0 & -0.5166 & 0.8563 \end{bmatrix} \text{e}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.4017 & & & \\ & 0.6619 & & \\ & & 0.5711 & \\ & & & 0.8006 \end{bmatrix}$$

O número de valores próprios fornece a dimensão do hiperelipsóide de confiança. Neste caso são 4 componentes principais.

Aplicando (15) e (16) a primeira componente principal é dada por :

$$\mathbf{p}_1 = \sqrt{0.8006} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,5166 \\ 0,8563 \end{bmatrix}$$

A fim de verificar se a rede é homogênea e isotrópica aplicou-se o teste da igualdade de valores próprios cuja hipótese nula é:

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$$

A estatística (16) com $\nu = 3$ e $b = 4$ forneceu o resultado 0.3671 e a um nível de significância de 5% o valor crítico é $\chi^2_{9,0.95} = 16.92$. Da desigualdade 0.3671<16.92 tem-se que a hipótese nula não é rejeitada e, portanto uma rede homogênea e isotrópica. Com esta situação as submatrizes que fornecem a acurácia local da rede, apresentam círculos de erros para cada ponto ajustado e para a acurácia global uma hiperesfera de erro.

Quando o peso é fixado, a influência do vetor dos parâmetros aproximados X_o na qualidade global da rede com iteração e sem iteração está mostrado na tabela 2. Indicando, que no planejamento de segunda ordem, necessita-se de estimativas melhoradas para o vetor dos parâmetros iniciais, de forma que os pesos das observações sejam obtidos com o mínimo de influência da matriz planejamento [a]

TABELA 2 – INFLUÊNCIA DE X_0 NA QUALIDADE GLOBAL DA REDE

CRITÉRIO	SEM ITERAÇÃO	COM ITERAÇÃO
$\lambda_{máximo}$	6,6031	0.8006
Determinante	0,9032	0,1216
Traço	8,5125	2,4354
$\dfrac{\lambda_{máximo}}{\lambda_{mínimo}}$	21,1096	1,993

Estimativas melhoradas para os parâmetros iniciais podem ser obtidas por exemplo, por transporte de coordenadas com base em observações provisórias ou então extraídas de uma carta. As estimativas para $\mathbf{x}_0$ serão melhoradas após se efetivar o ajustamento com iterações.

Através da aplicação da estatística (23) os valores próprios da situação sem iteração definem uma hiperesfera de erro, fato que ocorre também quando aplica-se iteração. Com o uso dos critérios de optimalidade porém verifica-se que a melhora no vetor dos parâmetros aproximados implica numa melhor concepção da rede.

Decompondo espectralmente a submatriz $\mathbf{Q}_{X5}$ e aplicando a (15) temos,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.9956 & -0.0936 \\ 0.0936 & 0.9956 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} 0.4017 & \\ & 0.6619 \end{bmatrix}$$

aplicando a (15) as componentes principais são escritas através da equação (16) da seguinte forma:

a) primeira componente principal

$\mathbf{p}_1 = \sqrt{0.6619}\begin{bmatrix} -0.0936 \\ 0.9956 \end{bmatrix}$ analisando as componentes do vetor (cosseno diretor) observa-se que este encontra-se no segundo quadrante da circunferência trigonométrica com um ângulo de rotação, em relação ao eixo original, de $95{,}37^0$,e comprimento do semi eixo maior da elipse de $\sqrt{0.6619}$.

Os parâmetros x_5 e y_5 estão pior determinados na direção $95{,}37^0$ em relação à base original cuja direção apresenta a variância máxima de 0.6619.

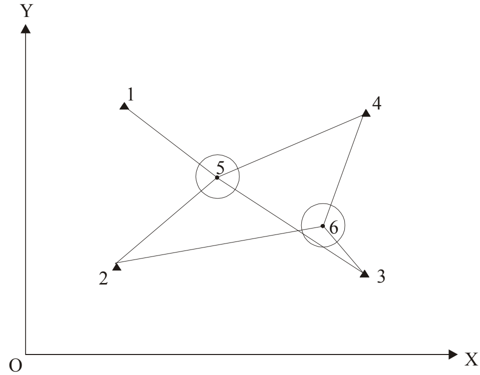
b) segunda componente principal

$\mathbf{p}_2 = \sqrt{0.4017}\begin{bmatrix} 0.9956 \\ 0.0936 \end{bmatrix}$ analisando as componentes do vetor (cosseno diretor) observa-se que este encontra-se no primeiro quadrante da circunferência trigonométrica com um ângulo de rotação, em relação à base original, de $5{,}37^0$

direção que representa a melhor determinação dos parâmetros com variância mínima de 0.4017.

A figura (4) mostra a representação geométrica das elipses de erro local, elipses estas que se degeneram em círculos de erro em vista da aplicação pela estatística (23).

FIGURA 4 – ELIPSES DE ERRO LOCAL



As componentes principais se apresentam de acordo com a análise global ou local requerida.

8. CONCLUSÃO

A análise de componentes principais fornece subsídios matemáticos e estatísticos que auxiliam na avaliação de redes geodésicas.
As expressões das componentes principais permitem verificar a posição da elipse ou elipsóide ou então hiperelipsóde de erros através da análise das componentes dos vetores próprios.

As expressões das componentes principais permitem a análise da acurácia global ou local da rede facilitando a distinção entre estes dois conceitos.

Para se ter uma situação ótima é necessário que os critérios de optimalidade dados por (17) , (18) , (19) e (20) sejam satisfeitos, e como critério adicional aplicar (21) nas elipses de acurácia global.

A influência da qualidade do vetor dos parâmetros aproximados é constatado. Fato que deve ser considerado em situações de planejamento de redes geodésicas, em especial planejamento de segunda ordem, em que uma iteração não pode ser realizada.

A integração do critério da igualdade de valores próprios e de optimalidade fornecem melhores subsídios para tomar decisões a respeito da qualidade de uma rede geodésica.

O resultado obtido da aplicação da estatística dada por (23) permite avaliar a estimativa dos valores iniciais aplicados para aplicação do método paramétrico. Pode-se, em casos particulares, verificar a necessidade de iteração no método paramétrico.

O teste da esfericidade dado pela expressão (23) e (24), dependendo da dimensão do elipsóide, permite avaliar a condição de isotropia e homogeneidade da rede a um dado nível de confiança.

A fim de verificar se algum ponto é interno a hiperesfera, ou seja, situa-se na região de aceitação a um dado nível de significância o teste dado em (10) deve ser aplicado.

REFERÊNCIAS

CROSSILA, F.; MARCHESI, C. (1983). Geodetic network optimization for the detection of crustal movements using a mekometer. Bolletino di Geodesia e Science Affini, Firenze, v. 42, n. 3, p.301-315.

MARQUES, J. M. (1994) O método da análise de componentes principais na detecção e identificação de outliers múltiplos em fototriangulação. Curitiba, 1994. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

MORAES, C. V. (2001) Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de estremas no espaço geométrico. Curitiba, 2001. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

NIEMEIER, W. (1982) Principal component analysis and geodetic networks – some basic considerations. In: BORRE, K; WELSCH, W. M. (Hrsg.): Proceedings Survey Control Netwiork. Schriftenreihe Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswerh München, n. 7, p. 275-291.

NIEMEIER, W. (1985 a) Netzqualität und Optimierung. In: PELZER, H. (Hrsg). Geodätische Netze in Landes-und Ingenieurvermessung II. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 527-558.

ZURMÜHL, R. (1950). Matrizen: eine Darstellung für Ingenieure. Berlin: Springer.

WELSCH, W. ; HEUNECCKE, O. ;KUHLMANN, H. (200). Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. Heidelberg: Wichmann. (Handbuch Ingenieurgeodäsie).

JACKSON, J.E. (1991). A user’s guide to principal components. New York. J. Wiley.

(Recebido em 10/10/02. Aceito para publicação em 25/11/02.)