

# A FUNÇÃO AMBIGÜIDADE

*Ambiguity Function*

JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE

## RESUMO

Os métodos cinemático e rápido estático para a navegação precisa e o posicionamento geodésico com NAVSTAR-GPS exigem um procedimento de inicialização rápido e eficiente. A inicialização, nesses métodos, refere-se a uma determinação da posição, com a qual as ambigüidades podem ser fixadas ao longo de levantamento. A possibilidade de inicialização tantas vezes quanto exigido é necessária. Este trabalho mostra o algoritmo da Função Ambigüidade como um estimador de máxima verosimilhança.

## ABSTRACT

The cinematic and rapid static methods for navigation and geodetic positioning with NAVSTAR-GPS require a procedure for fast and efficient initialization. The initialization, in those methods, refers to the performance of a positioning, allowing the ambiguities to be fixed along the surveying. The possibility for initialization as many times as required is necessary. This paper shows the algorithm of Ambiguity Function as a maximum likelihood estimator.

Entre as incógnitas do algoritmo da dupla diferença de fase, as ambigüidades exigem grandes mudanças na forma geométrica da figura formada pelos satélites rastreados e as estações rastreadoras, a fim de que as equações normais tornem-se mais bem condicionadas com a colaboração de observações bem diferentes entre si. Isso requer mais de uma hora de observações ou a reocupação dos pontos a levantar com intervalos superiores a uma hora.

As coordenadas de um ponto, entretanto, poderiam ser calculadas com todo o rigor para cada época de observações se as ambigüidades fossem conhecidas, permitindo, assim, a navegação diferencial de alta precisão. Daí o grande esforço da comunidade científica em encontrar meios de resolver rapidamente as ambigüidades.

A Função Ambigüidade não é a única solução, mas oferece condições muito boas para tratar esse problema, permitindo a determinação das ambigüidades a qualquer instante, com observações de uma só época, independentemente de haver

ocorrido perdas de ciclo mesmo em condições adversas como ocorre quando o receptor está em movimento rápido, como ocorre em vôo.

O método consiste em determinar uma posição por um processo que independa das ambigüidades como o da tripla diferença de fase, por exemplo, e então procurar experimentalmente a solução pesquisando pontos situados no entorno da posição obtida originalmente.

O volume a ser pesquisado terá como centro as coordenadas determinadas preliminarmente e suas dimensões dependem da confiabilidade da solução inicial. A densidade dos pontos candidatos à solução depende do desvio padrão das observações de fase.

Naturalmente, quanto maior forem o volume e a densidade de pontos a pesquisar, maior será o tempo de processamento. O ponto de maior valor da Função Ambigüidade é considerado a solução.

O método da função ambigüidade FA pode ser explicado com base no método da máxima verossimilhança, como será visto.

Quando a distribuição de uma variável é conhecida, o método da máxima verossimilhança pode ser utilizado num ajustamento. Verossimilhança significa semelhante à verdade e, então, denota a probabilidade de algo ser verdadeiro. Assim, máxima verossimilhança significa a máxima probabilidade de algo ser verdadeiro.

Um estimador de máxima verossimilhança possui propriedades tais como:

- ser assintóticamente não tendencioso
- dar estimativa de variância mínima
- ser consistente
- ser invariante

Dada a amostra

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

obtida de uma população com parâmetro  $\theta$  e com função de densidade de probabilidade dada por  $f(x_i, \theta)$ , com  $x_i$  independentes, a função de verossimilhança é dada por:

$$L = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta) \quad (01)$$

Se existir um valor  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  que torne  $L$  um máximo, esse valor é dito ser um estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$ .

Tal estimador pode algumas vezes ser encontrado com:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_{\hat{\theta}} = 0 \quad (02)$$

Se a função de densidade for dada pela distribuição normal

$$f(\Delta\phi) = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\phi_{\text{calc}} - \phi_{\text{obs}})^2} \quad (03)$$

a função de verossimilhança será dada por:

$$L = \prod_1^n \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\phi_{\text{calc}} - \phi_{\text{obs}})^2} \quad (04)$$

ou

$$L = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (\phi_{\text{calc}} - \phi_{\text{obs}})^2} \quad (05)$$

Como o máximo de uma função como L coincide com o máximo para o logaritmo neperiano da mesma, por facilidade:

$$\ln L = \ln \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n (\phi_{\text{calc}} - \phi_{\text{obs}})^2 \quad (06)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{\text{calc}}} \ln L = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_1^n (\phi_{\text{calc}} - \phi_{\text{obs}}) \quad (07)$$

Para  $n$  suficientemente grande, haverá um ponto de coordenadas (X,Y,Z) para o qual o valor calculado da dupla diferença de fases terá a maior aproximação do valor da dupla diferença de fases observada, só não anulando a derivada do logaritmo neperiano da função de verossimilhança por haver ruídos na observável dupla diferença de fase. Esse é o valor que maximiza a função de verossimilhança e é a solução procurada.

Na prática, a somatória, para uma dada época, estende-se para duas freqüências L e para S satélites, resultando, portanto, o número total de duplas diferenças de fase por época igual a  $n=2(S-1)$ , ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{\text{calc}}^{1j}} \ln L = \sum_{L=1}^2 \sum_{j=1}^{S-1} (\phi_{AB\text{calc}}^{1j} - \phi_{AB\text{obs}}^{1j}) \quad (08)$$

A procura do ponto que torna máxima a função de verossimilhança deve ser realizada experimentalmente por tentativa e erro.

A idéia é a de experimentar pontos que se saiba estarem próximos da solução, calculando o valor teórico da dupla diferença de fase para verificar para qual dos pontos testados o resíduo é menor e compatível com a precisão com que se medem as diferenças de fase.

Para tanto, substitui-se  $\phi_{AB\text{calc}}^{1j}$  por seu valor calculado em função das coordenadas do ponto candidato, com a equação da dupla diferença de fase, assumindo que os erros sistemáticos foram tratados:

$$\phi_{AB\text{calc}}^{1j} = -\frac{f}{c} D_{AB}^{1j}(Z, Y, Z) + N_{AB}^{1j} \quad (09)$$

Assim, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{\text{calc}}^{1j}} \ln L = \sum_{L=1}^2 \sum_{j=1}^{S-1} (D_{AB\text{calc}}^{1j} - N_{AB}^{1j} - \phi_{AB\text{obs}}^{1j}) \quad (10)$$

Como as duplas diferenças de fase são expressas em unidades de ciclos, multiplicando os termos entre parênteses por  $2\pi$  resulta o ângulo residual em radianos.

A função ambigüidade tira vantagem do fato de que, retirando as ambigüidades inteiras, o valor angular (entre parênteses) fica alterado de um múltiplo de  $2\pi$ , o que não altera a função.

Para definir a Função de Ambigüidade Introduz-se a função co-seno do resíduo da dupla diferença de fase. A introdução da função co-seno faz com que substitua-se valores próximos de zero na somatória, por valores próximos de 1 quando a solução está sendo alcançada.

Por outro lado, o co-seno é uma função não afetada por alterações de múltiplos de  $2\pi$ . Assim, a retirada de  $N_{AB}^{1j}$ , bem como as partes inteiras de  $\phi_{AB\text{calc}}^{1j}$  e  $\phi_{AB\text{obs}}^{1j}$  o valor da função de ambigüidade não se altera. Assim, a função ambigüidade fica definida como segue:

$$FA(X, Y, Z) = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{L=1}^2 \sum_{j=1}^{S-1} \cos \left[ -2\pi \left( -\frac{f}{c} D_{AB}^{1j}(X, Y, Z)_{\text{calc}} - \phi_{AB\text{obs}}^{1j} \right) \right] \right\} \quad (11)$$

A divisão da FA por  $n=2(S-1)$  é para normalizar a função.

Com esta definição, o valor máximo da  $FA(X,Y,Z)$  corresponde ao ponto  $(X,Y,Z)$  que maximiza a função de máxima verossimilhança.

A maior resolução possível na medida de fase pura é de  $1/100$  do comprimento de onda. Assim, para a freqüência  $L_1$ , o valor esperado do resíduo é de aproximadamente  $0.2\text{cm}$ . Como um resíduo tem probabilidade muito pequena de ser superior a  $3\sigma$ , ou seja,  $0.6\text{cm}$ , na dupla diferença de fase, o maior valor acumulado esperado seria de  $2.4\text{cm}$ . O valor de co-seno que corresponde a um resíduo de dupla diferença de fase próxima desse valor que corresponde a  $0.12\lambda$ .

O ponto, cujas coordenadas tornam máxima a FA deve ser encontrado por tentativa como segue:

1. Para a época que deseja-se determinar  $(X,Y,Z)$ , bem como o valor das ambigüidades duplas (inicializar o processo) determina-se uma posição inicial  $(X_0, Y_0, Z_0)$  com um algoritmo que independa das ambigüidades, como, por exemplo o da tripla diferença de fase.
2. Determina-se os limites do volume da figura (cubo ou outra) dentro da qual saiba-se existir a solução. Isto depende da precisão do método utilizado para determinar a posição inicial. Digamos  $2\text{m}$ .
3. Determina-se o espaçamento entre os pontos candidatos a solução. Isto depende da precisão das medidas de fase. Digamos  $2\text{cm}$ .
4. Para cada ponto candidato, calcula-se o valor da função ambigüidade.
5. O ponto de maior valor de FA será a solução.
6. No caso de navegação de sensores, as ambigüidades inteiras podem ser calculadas com base nas distâncias dos receptores aos satélites. e mantidas fixas até que nova inicialização seja necessária. Para tanto, basta dividir cada distância dos pontos aos satélites pelo comprimento da onda, para ter o número inteiro de ciclos.

O valor máximo da parcela de FA devido a uma dupla diferença de fase é 1. Na prática esse valor não ocorre em virtude dos ruídos existentes nas observações. Isto significa que o valor máximo possível para FA é de  $n=2(S-1)$ . Assim, quanto maior  $n$ , melhor será a determinação das ambigüidades.

Existem técnicas para diminuir o tempo de cálculo. Um deles, muito eficiente, é o de interromper o cálculo de um valor de FA sempre que a colaboração de qualquer parcela da somatória da FA for inferior a um valor preestabelecido  $\varepsilon$ :

Assim, toda a vez que uma parcela da somatória que forma FA não atender à condição:

$$\cos \left[ 2\pi \left( -\frac{f}{c} D_{ABcalc}^{1j}(X, Y, Z) - \phi_{ABobs}^{1j} \right) \right] \langle \varepsilon \rangle \quad (12)$$

abandona-se esse ponto. Um valor de  $\varepsilon$  utilizado por muitos autores de programas é de 0,7. Tal valor encerra um bom coeficiente de segurança, pois admite erro de até  $0,3\lambda$  quando o maior valor esperado é de  $0,12\lambda$ .

A adoção de um valor de  $\varepsilon$  é crítico para acelerar o processo de cálculo, mas também para assegurar que a solução correta não estará sendo perdida.

Outra maneira de diminuir o tempo é determinando melhor o volume a ser pesquisado. Ao invés de um cubo, se for adotado o volume do elipsóide de erros, o ganho em tempo de processamento pode ser substancial.

(Invited paper. Recebido em 15/04/01.)