

A INFLUÊNCIA DA REDUNDÂNCIA DA OBSERVAÇÃO SOBRE A PRECISÃO DOS PARÂMETROS

Observation redundancy influence over parameter precision

REGINALDO DE OLIVEIRA
QUINTINO DALMOLIN

Universidade Federal do Paraná - CT
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
Caixa Postal 19.001 – C. Politécnico – J. das Américas
CEP- 81.531 – Curitiba – Paraná – Brasil
e-mail: reoliveira@hotmail.com; qdalmolin@ufpr.br

RESUMO

Neste trabalho, apresentam-se os conceitos fundamentais e as formulações matemáticas sobre a medida de sensibilidade da redundância parcial da observação e sua influência na precisão dos parâmetros. Colocam-se os conceitos de confiabilidade interna e externa e discutem-se brevemente as suas implicações e aplicabilidade no controle de qualidade dos parâmetros ajustados. Apresentam-se ainda, dois exemplos de como essas grandezas podem fornecer subsídios à otimização de redes geodésicas. Os resultados permitem a tomada de decisão mais segura no descarte ou melhoramento de observações que não cooperam com a precisão dos parâmetros.

Palavras-chave: Sensibilidade da redundância; Redundância da observação; Precisão dos parâmetros; Otimização de redes geodésicas.

ABSTRACT

In this paper the fundamental concepts and mathematical formulations in relation to the measures of sensitivity of the partial redundancy of the observation and of the precision of the parameters are presented. The concepts of internal and external reliability are shown. Some implications and applicabilities are also discussed. The possibility of these measures supply resources for the optimization of geodetic networks is presented by means of an application. The results lead to a safe decision concerning cast out observations, which do not cooperate with parameter precision.

Keywords: Redundancy sensitivity; observation redundancy; Parameters precision; optimization of geodetic network.

1. INTRODUÇÃO

No Método dos Mínimos Quadrados na forma paramétrica, os parâmetros \mathbf{x} , são determinados com base nos modelos matemático funcional linearizado $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}$ e estocástico $\mathbf{P} = \sigma_0^2 \Sigma_{\ell_b}^{-1}$. Nestes modelos, \mathbf{V} representa o vetor dos resíduos; \mathbf{A} a matriz dos coeficientes das incógnitas também denominada de matriz planejamento ou de configuração; $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 - \mathbf{L}_b$ com \mathbf{L}_0 função dos parâmetros aproximados e \mathbf{L}_b vetor dos valores observados; \mathbf{P} a matriz dos pesos das observações; Σ_{ℓ_b} a matriz das covariâncias das observações e σ_0^2 o fator de variância a priori.

A matriz das covariâncias dos parâmetros estimados é expressa pela relação $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+$, na qual, o sinal gráfico "+" indica o uso da pseudo-inversa para a solução dos sistema de equações normais (rede livre) e pode ser obtida decompondo-se $\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}$ em seus valores próprios e vetores próprios (BRONSON, 1993). Sendo $\hat{\sigma}_0^2$ o fator de variância a posteriori. O valor dos elementos de $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$ na relação acima, são afetados pelas propriedades estocásticas de todas as observações representadas pela matriz \mathbf{P} e pela matriz planejamento \mathbf{A} , a qual contém informações sobre a geometria da rede. Similarmente, o número de redundância parcial de uma observação, denotado por r_i , (com $i = 1, 2, \dots, n$ observações), é dependente de todas as outras observações como pode ser notado na equação abaixo,

$$r_i = 1 - \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t \mathbf{p}_i \quad (1)$$

onde o sobre-escrito "t" indica a transposição da i-ésima linha \mathbf{a}_i da matriz planejamento \mathbf{A} , e \mathbf{p}_i , o i-ésimo elemento da matriz dos pesos \mathbf{P} .

As quantidades acima, quando estimadas a partir do método dos mínimos quadrados na forma paramétrica, apresentam variações em seus elementos devido às relações existentes entre cada uma das observações representadas pela matriz \mathbf{P} ,

incluídas no modelo. Estas variações podem ser quantificadas utilizando-se critérios de sensibilidade sobre as grandezas estimadas em função de cada observação. Extrai-se quantitativamente, o quanto cada observação está contribuindo para a variância de cada um dos parâmetros estimados, ou para a covariância entre dois parâmetros, fazendo-se uso das medidas de sensibilidade sobre a precisão dos mesmos. Similarmente, é possível quantificar quanto que (n-1) observações contribuem para a redundância de uma única observação qualquer inserida no modelo, ou seja, quanto que as outras observações do modelo contribuem para o controle de “outliers”, ou de erros grosseiros, de uma determinada observação. Esta quantificação e controle são feitos por meio das medidas de sensibilidade sobre a redundância da observação. Estes estudos encontram aplicabilidade, por exemplo, em processos de otimização de redes geodésicas, nas quais se faz necessário tomar decisões sobre a precisão das observações para que estas possam ser efetivadas e realizadas com sucesso em campo.

2. CRITÉRIO E CONCEITOS DE CONFIABILIDADE DE UMA REDE GEODÉSICA

A teoria da confiabilidade avalia se um determinado erro grosseiro numa observação é detectável. Avalia também a influência deste erro no ajustamento quando não detectado. Portanto, ela é parte integrante do conceito de avaliação da qualidade de um ajustamento. Observações que apresentam erros grosseiros são entendidas como observações inconsistentes perante o resto dos dados. A presença de erros grosseiros é detectada através da aplicação do teste global e a sua localização através do teste *data snopping* de Baarda (KAVOURAS, 1982). Quando estes erros não forem detectados nas observações, eles produzem alterações na determinação do valor dos parâmetros. As técnicas de detectar, localizar e avaliar a influência dos erros grosseiros nos parâmetros, recebem o nome de confiabilidade, no entanto, esta confiabilidade se subdivide em: confiabilidade interna e confiabilidade externa. A interna quantifica a menor porção do erro existente em uma observação Enquanto que a confiabilidade externa quantifica a influência do erro não detectável nos parâmetros estimados.

Após o ajustamento, o teste global sobre o fator de variância a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ é aplicado com o objetivo de detectar erros grosseiros. Este teste só pode ser aplicado se existir um conhecimento a priori da precisão das observações. Isto é, quando o fator de variância a priori σ_0^2 é conhecido (KAVOURAS, 1982). Assim a detecção de erros grosseiros após o ajustamento faz-se mediante a aplicação do teste Chi-quadrado, segundo a estatística de teste:

$$\chi^{*2} = \frac{\mathbf{V}^t \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} r, \quad (2)$$

com $r = n - u$ graus de liberdade e $\hat{\sigma}_0^2$ estimado através da expressão,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{V}^t \mathbf{P} \mathbf{V}}{r} \quad (3)$$

que também segue a distribuição χ_r^2 (Chi-quadrado) na formulação das seguintes hipóteses:

Hipótese 1 - Se a hipótese básica ou nula $H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ for testada contra a hipótese alternativa $H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$, o teste bilateral é aplicado, fixando-se um determinado nível de significância α . A hipótese H_0 não será rejeitada se a estatística calculada do teste, se situar no intervalo $\chi_{r;0,5\alpha}^2 < \chi^{*2} < \chi_{r;1-0,5\alpha}^2$ (SARTORIS, 2003);

Hipótese 2 - Se a hipótese básica ou nula $H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ for testada contra a hipótese alternativa $H_a : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$, o teste aplicado é o unilateral. E, dado um determinado nível de significância α , a hipótese H_0 não será rejeitada se a estatística do teste calculada for $\chi^{*2} < \chi_{r;1-\alpha}^2$.

Contudo, quando o teste global é utilizado para detectar erros grosseiros, normalmente espera-se que $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$. Isso por que a suposição fundamental é que as observações contaminadas por erros grosseiros resultem em resíduos padronizados de magnitudes significativamente altas. Portanto a hipótese a ser testada é a Hipótese 2. Certamente, ao se aplicar um teste de hipóteses, pode-se cometer dois tipos de erros em consequência do não conhecimento do valor verdadeiro a ser testado. Isto é, **erro tipo I**, cometido quando se rejeita a hipótese nula e esta é, na realidade, verdadeira; e **erro tipo II**, cometido quando se aceita a hipótese nula e esta é falsa.

Na literatura, o nível de significância é designado por α e representa a probabilidade de se cometer o erro tipo I, enquanto que o valor $1 - \alpha$ é chamado de nível de confiança. Por exemplo, se o nível de confiança é de 95%, significa que não se quer rejeitar a hipótese verdadeira em mais de 5 vezes em 100. Já a probabilidade do erro tipo II, designada por β , depende do valor real suposto para o parâmetro que está sendo estimado. Em geral a probabilidade de se cometer o erro

tipo II não é conhecida, pois não se sabe qual é o verdadeiro valor do parâmetro.

O valor $1 - \beta$ representa a probabilidade de não se cometer o erro tipo II e é chamado de poder do teste. Ou seja, representa a probabilidade de se rejeitar a hipótese nula quando ela é em realidade falsa. Como a significância do teste é previamente estabelecida, um teste de hipóteses será tão melhor quanto menor for a probabilidade de se cometer o erro tipo II. Salienta-se ainda, que o erro tipo I somente é cometido quando se rejeita H_0 , e o erro tipo II é cometido somente quando H_0 é aceita (COSTA NETO, 1995).

O elemento, redundância parcial r da observação, permite a controlabilidade de erros grosseiros nas observações. As redundâncias parciais r_i , grandezas adimensionais, são os elementos da diagonal principal da matriz originada do produto das matrizes cofatora dos resíduos \mathbf{Q}_v e dos pesos \mathbf{P} , onde

$$\mathbf{Q}_v = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{\Sigma}_v, \quad (4)$$

sendo $\mathbf{\Sigma}_v$ a matriz das covariâncias dos resíduos dada por:

$$\mathbf{\Sigma}_v = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{\Sigma}_{\ell a}. \quad (5)$$

na qual $\mathbf{\Sigma}_{\ell a} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t$ é a matriz das covariâncias dos valores observados ajustados.

A equação (4) pode ser escrita como:

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t. \quad (6)$$

Multiplicando à direita, ambos os membros de (6), pela matriz dos pesos obtém-se

$$\mathbf{Q}_v \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P}. \quad (7)$$

Considerando que r_i representa cada elemento da diagonal principal da matriz $\mathbf{Q}_v \mathbf{P}$, escreve-se,

$$r_i = (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii} = q_{v_i} \times p_i. \quad (8)$$

Ou de forma equivalente, se expressa à equação (8) através do i -ésimo

elemento da diagonal principal de (7) e obtém-se a (1), cujo valor é associado a um número, chamado de redundância para cada quantidade observada. Os valores das redundâncias parciais r_i , situam-se no intervalo de $0 \leq r_i \leq 1$ e permitem a controlabilidade das observações referente a erros grosseiros. Os sub-intervalos para as decisões sobre a controlabilidade de observações mediante as redundâncias parciais estão representados no quadro1.

Quadro 1 – Intervalo para a Controlabilidade de Observações.

| | |
|-----------------------|------------|
| $0, \leq r_i < 0,01$ | Não há |
| $0,01 \leq r_i < 0,1$ | Ruim |
| $0,1 \leq r_i < 0,3$ | Suficiente |
| $0,3 \leq r_i \leq 1$ | Boa |

FONTE: MORAES (2001)

A redundância total r (número de graus de liberdade) é dada pela expressão:

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n r_i = r = n - u. \quad (9)$$

Contudo, a localização de erros grosseiros mediante a aplicação do teste *data snopping*, é realizada através da utilização individual de cada um dos resíduos V_i padronizados (BAARDA,1968),

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (10)$$

Segundo (KUANG, 1996), σ_{v_i} é diretamente proporcional ao produto do desvio padrão da observação e a raiz quadrada da redundância da mesma e pode ser expresso por,

$$\sigma_{v_i} = \sigma_{\ell_i} \sqrt{r_i}. \quad (11)$$

A detecção de erros grosseiros nas observações é conduzida através da formulação do seguinte teste de hipóteses:

H_0 : na observação ℓ_i não existe erro grosseiro.

H_a : na observação ℓ_i existe erro grosseiro.

Se $|w_i| > \sqrt{F_{1-\alpha;1,\infty}}$, com Z sendo a distribuição reduzida, a hipótese nula H_0 será rejeitada. Isto é, condicionada à significância do teste, a i-ésima observação estará comprometida com erros grosseiros.

A investigação do problema do erro tipo II em redes geodésicas e que resultou na teoria da confiabilidade foi iniciada por BAARDA em 1968. A idéia central é investigar as implicações da aceitação da hipótese nula, que postula a não existência de erro grosseiro na observação, e como consequência cometer o erro tipo II. Por meio dessa teoria pode-se estimar o valor mínimo de um erro grosseiro na observação que pode ser detectado. Portanto, entende-se por confiabilidade interna, a medida da capacidade de detectar erros grosseiros com probabilidade $1 - \beta$ (LEICK, 1995). Em outras palavras, a confiabilidade interna indica o erro mínimo que se encontra em uma observação e que é sensível ao teste anterior.

O limite para o erro grosseiro, ∇_{0i} , em uma observação na qual é cometido o erro do tipo II, com níveis de probabilidade α e β é dado por

$$|\nabla_{0i}| \geq \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i}, \quad (12)$$

isto é, qualquer erro embutido na observação maior ou igual à $\frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i}$ será detectado com uma probabilidade de $1 - \beta$. Nesta expressão, σ_{ℓ_i} representa o desvio padrão da observação enquanto que δ_0 é o parâmetro de não centralidade e significa a diferença de esperanças matemáticas entre as hipóteses, alternativa e nula, obtido através da relação (MORAES, 1998):

$$\delta_0 = Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + |Z_\beta|, \quad (13)$$

onde Z é a distribuição normal reduzida.

Já a teoria da confiabilidade externa é dividida em confiabilidade externa local e confiabilidade externa geral. Esta teoria quantifica a influência de cada um dos erros não-detectados nos parâmetros obtidos do ajustamento ou nas funções destes parâmetros. Segundo Moraes (1998), a magnitude de um erro não detectado pode

ser estimada pela relação (12), isto é, se um erro não é detectado, então o limite superior para sua magnitude é igual a

$$\nabla l_i = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i} \quad (14)$$

De um modo geral, a confiabilidade externa trata da influência de possíveis erros grosseiros ∇l_i não detectados e não localizados sobre os parâmetros estimados, ou seja, quantifica a influência da porção do erro grosseiro na solução ou nas funções dos parâmetros.

No ajustamento das observações pelo método dos mínimos quadrados na forma paramétrica, o vetor de correções \mathbf{x} , na presença de um erro grosseiro ∇l_i é expresso por (KUANG, 1996; MORAES, 1998),

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} (\mathbf{L} - \mathbf{e}_i \nabla l_i) = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{L} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla l_i = -\mathbf{x} + \nabla \mathbf{x} \quad (15)$$

sendo \mathbf{N} a matriz dos coeficientes das equações normais $(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})$ e \mathbf{e}_i a i -ésima coluna da matriz identidade $n \times n$.

A magnitude do erro mínimo que tem influência na determinação dos parâmetros é estimado por (KUANG, 1996),

$$\nabla \mathbf{x}_{0_i} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla l_i \quad (16)$$

ZHANG e LI (1990) propuseram que os menores erros grosseiros possíveis de serem detectados são de 6 a 8 vezes o desvio padrão da observação.

3. SENSIBILIDADE DO MODELO PARAMÉTRICO COM MÍNIMOS QUADRADOS

Os parâmetros estimados por mínimos quadrados mostram sensibilidade à variação das observações individuais incluídas no modelo e se reflete na precisão. Similarmente, a contribuição da redundância de uma observação para a redundância total está associada às outras observações do modelo, e cada observação também contribui para a redundância parcial. Portanto, a medida de sensibilidade fornece informações quantitativas sobre a precisão dos parâmetros em relação às observações. A sensibilidade da contribuição da redundância de uma observação para com as outras se apresenta como um fator importante na análise da robustez do modelo. Pois, além de propiciar o controle de erros grosseiros nas observações,

afeta diretamente os elementos da matriz cofatora \mathbf{Q}_x , através das matrizes de pesos \mathbf{P} e de planejamento \mathbf{A} .

3.1 Medida de Sensibilidade na Precisão dos Parâmetros

Considerando que a matriz dos pesos, com n observações independentes seja representada por,

$$\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n) \quad (17)$$

e que, na i -ésima observação existe uma variação escalar w_i no valor de seu peso,

$$\mathbf{P}_1 = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, w_i p_i, \dots, p_n) \quad (18)$$

Então, a diferença entre as matrizes de ponderação se apresenta,

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P} - \mathbf{P}_1 = \text{diag}(0, 0, \dots, (1 - w_i) p_i, \dots, 0) \quad (19)$$

Com a finalidade de encontrar uma medida quantitativa para a sensibilidade de \mathbf{Q}_x com respeito à cada observação, calcula-se uma expressão para

$$\left(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}\right)^{-1} \text{ e posteriormente para } \frac{\partial \left(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}\right)}{\partial w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \text{ De acordo com}$$

DING e COLEMAN (1996), $\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}^t (\mathbf{P} - \mathbf{P}_2) \mathbf{A} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}$, na qual, substituindo a (19) obtém-se,

$$\left(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}\right) = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}\right) - \mathbf{a}_i^t p_i \mathbf{a}_i (1 - w_i) \quad (20)$$

Seguindo o desenvolvimento feito por BELSLEY, KUH e WELSCH (1980) temos,

$$\left(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} + \frac{\left(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{a}_i^t p_i \mathbf{a}_i \left(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} (1 - w_i)}{1 - h_i (1 - w_i)}, \quad (21)$$

onde

$$h_i = \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t \mathbf{p}_i \quad (22)$$

representa o i -ésimo elemento da diagonal principal da matriz \mathbf{H} abaixo,

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \quad (23)$$

A equação (21) mostra que após o peso da i -ésima observação ser multiplicado por um fator w_i , a matriz cofatora dos parâmetros estimados apresenta uma mudança em seus valores, e a diferença entre a matriz de covariâncias com o peso modificado e a original é dada por,

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \frac{(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t \mathbf{p}_i \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (1 - w_i)}{1 - h_i (1 - w_i)} \quad (24)$$

A derivada parcial da matriz $(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1}$ com respeito à w_i pode ser obtida a partir da equação (21). Assim,

$$\frac{\partial (\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1}}{\partial w_i} = - \frac{(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t \mathbf{p}_i \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}}{[1 - h_i (1 - w_i)]^2} \quad (25)$$

Tomando $w_i = 1$ na equação (22) tem-se

$$\left. \frac{\partial (\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1}}{\partial w_i} \right|_{w_i=1} = - (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t \mathbf{p}_i \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (26)$$

Esta equação descreve a razão de mudança de $(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1}$ com o peso p_i da i -ésima observação, e conduz à uma medida quantitativa da sensibilidade de $(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ da i -ésima observação em \mathbf{Q}_x .

Tomando a diferencial total de $(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1}$ com respeito a w_i $i = 1, 2, \dots, n$ obtém-se a expressão fazendo $w_i = 1$ $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial (\mathbf{A}^t \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1}}{\partial w_i} = - \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t p_i \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1} \right] \quad (27)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}}{\partial w_i} = - (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (28)$$

Desta forma, a matriz $(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ é decomposta em n parcelas, sendo que cada parcela é a contribuição de cada observação para a totalidade da matriz cofatora dos parâmetros estimados, \mathbf{Q}_x .

3.2 Medida de Sensibilidade da Redundância da Observação

A medida de sensibilidade sobre a redundância r_i com respeito a todas as outras observações é obtida mediante as seguintes considerações:

a) Assume-se que r_i muda para $r_{i(j)}$, ou seja, a redundância referente a i -ésima observação r_i muda seu valor para $r_{i(j)}$ quando o peso da j -ésima observação é modificado. Quando o peso p_j da j -ésima observação é multiplicado por uma constante w_j similarmente à equação (18), tem-se a partir das equações (01), (20) e (24),

$$r_{i(j)} = r_i - \frac{\mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_j^t p_j \mathbf{a}_j (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t p_i (1 - w_j)}{1 - h_j (1 - w_j)} \quad (29)$$

Considerando

$$\mathbf{P}_1 = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, w_j p_j, \dots, p_n) \quad (30)$$

a equação (29) pode ser escrita como,

$$r_i(j) = r_i - \frac{h_{ij}h_{ji}(1-w_j)}{1-h_j(1-w_j)} \quad (31)$$

onde $h_{ij} = \mathbf{a}_i(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_j^t\mathbf{p}_j$ e $h_{ji} = \mathbf{a}_j(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_i^t\mathbf{p}_i$ são os elementos (i, j) e (j, i) da matriz \mathbf{H} e, h_j definido de forma similar a equação (22), é o j -ésimo elemento da diagonal principal da matriz \mathbf{H} .

b) Tomando a derivada parcial de $r_i(j)$ com respeito à w_j e fazendo $w_j = 1$ segue o resultado,

$$\left. \frac{\partial r_i(j)}{\partial w_j} \right|_{w_j=1} = \mathbf{a}_i(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_j^t\mathbf{p}_j\mathbf{a}_j(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_i^t\mathbf{p}_i \quad (32)$$

ou

$$\left. \frac{\partial r_i(j)}{\partial w_j} \right|_{w_j=1} = h_{ij}h_{ji} \quad (33)$$

c) Tomando a derivada total de $r_i(j)$ com respeito à w_j $j=1,2,\dots,n$ e fazendo $w_j = 1$ para todo j , segue o resultado,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i(j)}{\partial w_j} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_i(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_j^t\mathbf{p}_j\mathbf{a}_j(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_i^t\mathbf{p}_i) \quad (34)$$

Considerando a definição de uma matriz idempotente $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ (BRONSON, 1993) que se aplica à matriz dada em (23) e observando os seus elementos fora da diagonal obtém-se

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_i(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_j^t\mathbf{p}_j\mathbf{a}_j(\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}_i^t\mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^n h_{ij}h_{ji} = h_i \quad (35)$$

e com isto,

$$h_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (h_{ij} h_{ji}) + h_i^2 \quad (36)$$

Reescrevendo a equação acima e dividindo ambos os membros por h_i tem-se,

$$\frac{h_i - h_i^2}{h_i} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (h_{ij} h_{ji})}{h_i} \quad (37)$$

e considerando as equações (22) e (01) temos,

$$\frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (h_{ij} h_{ji})}{h_i} = 1 - h_i = r_i \quad (38)$$

A equação acima é a decomposição do número de redundância r_i com respeito a todas as observações, exceto a i -ésima observação. A equação (38) mostra como cada observação contribui para o valor da redundância parcial r_i . O resultado também conduz a uma medida de sensibilidade de r_i com respeito a cada observação. Assim, diferentes observações terão diferentes efeitos sobre a qualidade de uma rede como mostrado acima.

Os resultados obtidos nas equações (26) e (38) medem quantitativamente as contribuições das observações individuais para a precisão e a confiabilidade interna de uma rede.

4. APLICAÇÃO NO PLANEJAMENTO E OTIMIZAÇÃO DE REDES GEODÉSICAS

Em um processo de otimização, necessita-se tomar decisões sobre tipo, a precisão e posição das observações para efetivá-las. Estas decisões são tomadas com a finalidade de realizar uma rede que tenha postulações de precisão e confiabilidade suficientes para a situação. Neste processo, informações sobre as observações ajudam a tomar decisões mais completas. Por exemplo, a necessidade

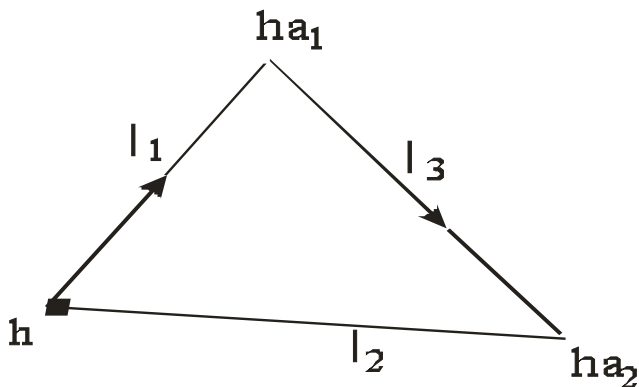
de melhorar a precisão dos parâmetros estimados em algum ponto crítico da rede. A equação (26) é usada para obter a sensibilidade da precisão do parâmetro com respeito às diferentes observações da rede. As observações que cooperam com a precisão podem ser refeitas de uma maneira mais refinada, aumentando a qualidade do parâmetro. As observações que não são efetivas, isto é, que não cooperarem com a melhoria dos parâmetros, podem ser removidas ou ter sua precisão diminuída, auxiliando na redução de custos.

5 EXPERIMENTOS

5.1 Experimento 1

Uma aplicação simples em uma rede de nivelamento é usada para mostrar como se obtém os resultados mencionados teoricamente acima. Na figura 1, a cota do ponto h é considerada conhecida, isenta de erro e arbitrada igual a zero.

FIGURA 1 - Rede de Nivelamento.



Considerando, $\sigma_{\ell_1}^2 = 4 \text{ mm}^2$, $\sigma_{\ell_2}^2 = 4 \text{ mm}^2$ e $\sigma_{\ell_3}^2 = 2 \text{ mm}^2$ com as seguintes equações de observação:

$$\ell_1 = ha_1 \quad ; \quad \ell_2 = ha_2 \quad ; \quad \ell_3 = ha_2 - ha_1$$

A matriz dos coeficientes é:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os dados apresentados na tabela 1 referem-se à parcela de contribuição de cada observação na precisão de cada um dos parâmetros, por exemplo, a observação ℓ_1 , que é um desnível tem uma parcela de contribuição de 1,44 mm² para a variância total de 2,4 mm² do parâmetro. ha_1 .

Tabela 1 - Decomposição de Variâncias.

| Obs | tipo | Decomposição da variância | | |
|----------|----------|---------------------------|--------|------|
| | | ha_1 | ha_2 | % |
| ℓ_1 | Desnível | 1,44 | 0,64 | 26,7 |
| ℓ_2 | Desnível | 0,64 | 1,44 | 60 |
| ℓ_3 | Desnível | 0,32 | 0,32 | 13,3 |
| soma | | 2,4 | 2,4 | 100 |

As quantidades referentes à tabela 1 são obtidas mediante a utilização da equação (29) e informam quanto cada observação coopera para a variância do desnível ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente. Observando a tabela 1 nota-se que, para esta simulação, numericamente as três observações contribuem igualmente para as variâncias dos dois parâmetros. A observação ℓ_1 contribui dos 2,4 mm² com 1,44 mm² para ha_1 enquanto isso para ha_2 a observação ℓ_2 é que contribui com 1,44 mm² para 2,4 mm². Ambas as observações são importantes para a rede e não podem ser descartadas, porém podem ser refeitas com uma melhor qualidade para diminuir a influência na precisão total da rede e auxiliar na melhoria do projeto da mesma.

A redundância parcial, para cada observação, obtida da matriz $\mathbf{Q}_v\mathbf{P}$ é respectivamente 0,4 , 0,4 e 0,2. A observação ℓ_3 , devido ao seu número de redundância, tem uma controlabilidade suficiente, Quadro 1, em relação à erros grosseiros. Comparando com a redundância das outras observações, um erro embutido na observação ℓ_3 tem probabilidade menor de ser localizado. O fato é que 20% dos erros grosseiros da observação ℓ_3 são refletidos no resíduo v_3 , 40% dos erros grosseiros da observação ℓ_2 são refletidos no resíduo v_1 e 40% dos

erros grosseiros da observação ℓ_3 no resíduo v_2 .

Pode-se observar na tabela 1 que a variância de ha_1 é mais sensível à observação ℓ_1 . Em contrapartida na tabela 2 vê-se que a observação ℓ_1 e a observação ℓ_2 contribui de forma homogênea para a redundância da observação ℓ_3 . A variância de ha_2 é fortemente influenciada pela observação 2.

Tabela 2 - Sensibilidade Da Redundância 3.

| observação | tipo | Decomposição de r_3 |
|------------|----------|-----------------------|
| l_1 | Desnível | 0,1 |
| l_2 | Desnível | 0,1 |
| soma | | 0,2 |

Na tabela 3 nota-se que a observação ℓ_1 coopera de forma mais significativa para a redundância da observação ℓ_2 , comparativamente à observação ℓ_3 .

Tabela 3 - Sensibilidade Da Redundância 2.

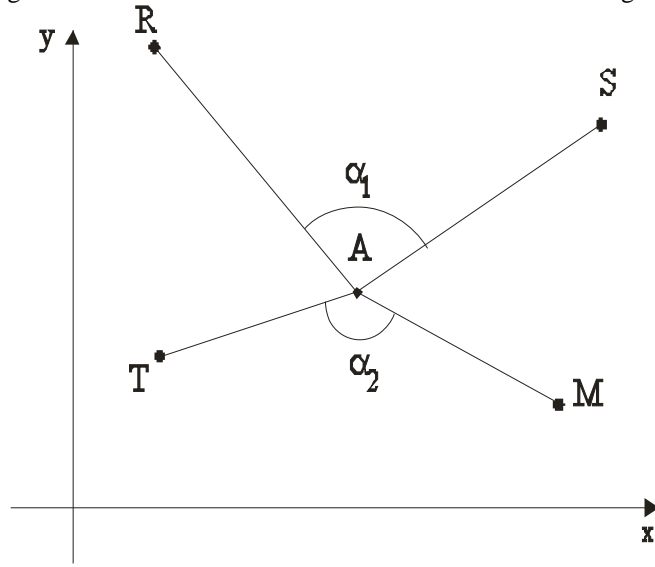
| Observação | Tipo | Decomposição de r_2 |
|------------|----------|-----------------------|
| l_1 | Desnível | 0,2666 |
| l_3 | Desnível | 0,1333 |
| Soma | | 0,4 |

Percebe-se, ainda, que a observação ℓ_3 contribuí para que erros grosseiros em ℓ_2 não sejam localizados.

5.2 Experimento 2

Considera-se neste experimento uma rede geodésica na qual quatro observações de distâncias e duas observações de ângulo são realizadas a partir de quatro pontos com coordenadas conhecidas. A finalidade é estimar as coordenadas do ponto A fazendo-se uso do método dos mínimos quadrados na forma paramétrica. Verificam-se então, as observações que apresentam uma maior importância na rede, para isso serão utilizadas as técnicas de decomposição da variância e redundância.

Figura 2 – Rede Geodésica Bidimensional: Distâncias e Ângulos.



As coordenadas dos pontos conhecidos R, T, S e M e também as coordenadas aproximadas do ponto A estão apresentados na tabela 4.

Tabela 4 - Coordenadas Fixas e Aproximadas da Rede Geodésica.

| Ponto | Coordenadas fixas | |
|-------|-------------------------|----|
| | x | y |
| R | 20 | 70 |
| T | 30 | 20 |
| M | 110 | 20 |
| S | 120 | 60 |
| Ponto | Coordenadas aproximadas | |
| A | 70 | 30 |

A precisão de cada observação fornece a matriz dos pesos, neste caso a precisão de distância é $\sigma_1 = 1\text{ cm}$ e a de ângulo é $\sigma_1 = 2''$, que na formação da

matriz dos pesos foram transformadas em metro e radiano, respectivamente.

A matriz de covariâncias completa é obtida mediante a aplicação da relação $\mathbf{Q}_{x\cdot}$.

$$\Sigma_{xa} = \mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} 2,5475 & -0,0217 \\ -0,0217 & 0,0033 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

Para quantificar a influência de cada observação em cada variância dos parâmetros utilizou-se a relação (29) e os resultados estão apresentados no quadro 2.

Quadro 2 - Decomposição das Variâncias dos Parâmetros.

| σ^2 ℓ_i | σ_{xa}^2 $\times 10^{-5}$ | σ_{ya}^2 $\times 10^{-5}$ |
|------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| RA = ℓ_1 | 0,4011 | 0,0000 |
| TA = ℓ_2 | 0,6082 | 0,0000 |
| MA = ℓ_3 | 0,4723 | 0,0000 |
| AS = ℓ_4 | 0,6134 | 0,0000 |
| $\alpha_1 = \ell_5$ | 0,3415 | 0,0005 |
| $\alpha_2 = \ell_6$ | 0,1110 | 0,0027 |
| soma | 2,5475 | 0,0032 |

Observa-se pelo quadro 2 que a observação que mais influencia a precisão de x_a é a observação ℓ_4 seguida da observação ℓ_2 . Em uma situação de planejamento estas observações podem ser retiradas do projeto da rede visto que elas têm uma maior influência e em consequência diminuem a precisão deste parâmetro. A influência de cada observação na precisão de y_a não é tão significativa. As observações ℓ_5 e ℓ_6 são as que apresentam as maiores influências na precisão deste parâmetro. As observações de distâncias, são as que mais influenciam a precisão do parâmetro x_a , enquanto a precisão do parâmetro y_a não sofre tanto a influencia das observações de distância e sim das observações de

ângulos. As observações que apresentam maior influência na rede podem ser refeitas com melhor precisão para terem menor influência na variância total dos parâmetros e em consequência melhorar a precisão da rede

Para verificar a influência de cada observação em cada uma das redundâncias parciais utilizou-se a relação (38) e os resultados estão apresentados no quadro 3.

Quadro 3 - Decomposição da Redundância da Observação.

| $\ell_i \backslash r_j$ | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ℓ_1 | 0 | 0,1574 | 0,1572 | 0,1575 | 0,0513 | 0,0107 |
| ℓ_2 | 0,2384 | 0 | 0,2387 | 0,2387 | 0,0862 | 0,0121 |
| ℓ_3 | 0,1850 | 0,1855 | 0 | 0,1853 | 0,0692 | 0,0084 |
| ℓ_4 | 0,2407 | 0,2407 | 0,2406 | 0 | 0,0829 | 0,0141 |
| ℓ_5 | 0,1239 | 0,1373 | 0,1419 | 0,1308 | 0 | 0,1575 |
| ℓ_6 | 0,0543 | 0,0404 | 0,0362 | 0,0468 | 0,3301 | 0 |
| soma | 0,8424 | 0,7612 | 0,8145 | 0,7592 | 0,6197 | 0,2029 |

A decomposição de cada redundância mostra, de forma geral, como cada observação coopera para a detecção de erros grosseiros na rede. Observando o quadro 1, a observação que mais auxilia na detecção de erros na rede é a ℓ_4 . Esta também é a que mais auxilia na deterioração da precisão da rede. Esta afirmação concorda com o fato de que, redundância e precisão apresentam conflito em seus objetivos. Uma observação precisa nem sempre apresenta uma redundância que coopera na detecção de erros grosseiros nesta observação. A observação ℓ_6 apresenta pouca influência na redundância de cada observação, comparativamente às outras observações, porém apresenta uma influência mais significativa na redundância da observação ℓ_5 , cooperando mais significativamente na detecção de erros desta observação. A observação ℓ_6 é fortemente influenciada pela observação ℓ_5 já que pelo quadro 3, esta é a que mais influencia a redundância r_6 ,

isto provavelmente se explica pela existência de uma maior dependência linear entre estas observações. Neste caso um erro grosseiro de uma observação pode estar influenciando a outra e deve-se tomar precaução na eliminação de uma dessas observações, pois, pode-se estar eliminando uma observação “isenta” de erro.

6. CONCLUSÃO

A medida de sensibilidade sobre a precisão do parâmetro possibilita extrair elementos que podem ser úteis na tomada de decisão como, por exemplo, qual observação efetivamente coopera com a precisão do parâmetro. A observação que não coopera para a precisão, quando se tem um número razoável de graus de liberdade, pode ser descartada ou refeita em um planejamento do levantamento.

A medida de sensibilidade sobre a redundância parcial da observação permite diagnosticar qual observação está cooperando para que se possam localizar possíveis erros grosseiros na observação. Podendo também ser elemento de tomada de decisão para possíveis descarte ou melhoramento de uma observação.

O confronto das duas medidas permite uma tomada de decisão mais segura, pois uma observação pode não cooperar com a precisão e tampouco com a redundância.

REFERÊNCIAS

- BAARDA, W. (1968). *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*, New Series, vol. 2, n. 5, Delft, 1968.
- BELSLEY, D.; KUH, E.; WELSCH, R.E. *Regression Diagnostic: Identifying Influential Data and Sources of Colinearity*. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- BRONSON, R. *Matrizes*. Lisboa: McGraw-Hill, 1993.
- COSTA NETO, P.L.O. *Estatística*. 17ª reimpressão. São Paulo: Edgar Blücher. (1977).
- DING, X.; COLEMAN, R. Sensitivity analysis in Gauss-Markov models. *Journal of Geodesy*, Berlin, v. 70, n. 8, p. 480-488. 1996.
- KAVOURAS, M. *On the Detection of Outliers and the Determination of Reliability in Geodetic Networks*. Canadá: Fredericton. University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Technical Report, n. 87, 1982.
- KUANG, S. *Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications*. Chelsea: Ann Arbor Press, 1996.
- LEICK, A. *GPS Satellite Surveying*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- MORAES, C. V. Análise de erros grosseiros e confiabilidade de redes geodésica *Cartografia e Cadastro* nº 8, 1998
- MORAES, C. V. *Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico*. Curitiba. 2001. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

- SARTORIS, A. *Estatística e introdução a econometria*. São Paulo: Saraiva (2003).
- ZHANG, Z.; LI, X. A new optimization method for monitoring networks base don the sensitivity criterion. *Zeitschrift für Vermessungswesen*. Stuttgart, v. 115, n. 6, p. 247-255. (1990).

(Recebido em fevereiro/08. Aceito em agosto/08.)