

# **TOLERÂNCIA PARA COORDENADAS BARICÊTRICAS NA INTERPOLAÇÃO DE ATRIBUTOS GEORREFERENCIADOS**

*Tolerance for barycentric coordinates in georefered attribute interpolations*

IVANILDO BARBOSA<sup>1</sup>

FLÁVIO LUÍS DE MELLO<sup>2</sup>

LUIZ FELIPE COUTINHO FERREIRA DA SILVA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Militar de Engenharia

Seção de Ensino de Engenharia Cartográfica

Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha

CEP 22290-270 - Rio de Janeiro - RJ

ivanildo.barbosa@gmail.com, felipe@ime.eb.br

<sup>2</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro

Departamento de Engenharia Eletrônica da Escola Politécnica

Av. Brg. Trompowski s/n, CT, Bloco H, sl.219

Cidade Universitária – Ilha do Fundão – Rio de Janeiro – RJ

fmello@del.ufrj.br

## **RESUMO**

A aplicação do modelo linear para interpolação de atributos de pontos sobre o domínio bidimensional se processa ponderando dos valores dos atributos de três pontos em função das respectivas coordenadas baricêtricas. Entretanto, o emprego de aritmética finita nos cálculos realizados em ambiente computacional implica em coordenadas baricêtricas eivadas de resíduos que, mesmo com dimensões irrelevantes face os objetos representados, interferem na tomada de decisões pelo sistema quando há comparação direta de valores. Como solução, opta-se pela definição de uma vizinhança ao redor do valor esperado na qual pode estar o valor processado. Ao longo deste trabalho é analisada a influência da precisão numérica em ambientes computacionais na interpolação de atributos, visando a estabelecer limites de tolerância para os resíduos surgidos no cálculo das coordenadas baricêtricas. Tais limites são calculados com base nos parâmetros estabelecidos no Padrão de Exatidão Cartográfica (Decreto nº 89.817 de 20 de junho de 1984), conforme a classificação mais rigorosa. Nos testes realizados, os resíduos observados foram muito menores que a precisão do documento

cartográfico empregado. Desta forma, tais limites são referências confiáveis para contornar o problema apresentado.

**Palavras-chave:** Rede Triangular Irregular; Interpolação; Padrão de Exatidão Cartográfica.

## ABSTRACT

To apply the linear model to interpolate attributes for 2D points, the attributes of three points were weighted with their respective barycentric coordinates. However, the finite arithmetic effects at the computation returns barycentric coordinates contaminated with numerical residuals that, despite their irrelevant dimensions that face the representable objects, it may influence the system to make decisions involving values comparisons. In order to fix this problem, tolerance limits were established around the theoretical value, and the processed values are attuned. This paper analyzes the influence from attributes interpolation numerical precision over a computational environment. The limits for residuals produced by computational barycentric coordinates calculus were defined. Those limits were chosen so that data imprecision did not exceed its original cartographical documents precision limits, according to the Padrão de Exatidão Cartográfica (PEC), under the most rigid classification. The residuals found in tests were quite smaller than the precision assured by the cartographic document used. This way, the established limits were reliable references to solve the purposed problem.

**Key words:** Triangular Irregular Network (TIN); Interpolation; Cartographical Exactness Standard.

## 1. INTRODUÇÃO

Com a demanda dos sistemas de visualização tridimensional, surgiu também a preocupação com a fidelidade da representação das grandezas lineares e angulares. Representar superfícies irregulares, como a terrestre, é uma tarefa complexa, impossível no panorama tecnológico atual, quando se exige um rigor infinitesimal. Entretanto, de acordo com a aplicação, os valores representados aceitam imprecisões dentro de limites pré-estabelecidos. O Padrão de Exatidão Cartográfica (BRASIL, 1984), doravante citado como PEC, estabelece os limites planimétricos e altimétricos de imprecisão na representação de feições nos documentos cartográficos analógicos de acordo com as respectivas escalas de representação. Embora se questione a validade dos valores estabelecidos no PEC para fins de representação de feições em ambientes digitais de visualização, tais valores serão empregados por serem o parâmetro indicativo da precisão dos dados originais, caso os dados digitais tenham sido obtidos pela vetorização dos fotolitos dos respectivos documentos cartográficos em meio analógico. Neste caso, acrescentam-se aos erros do documento original, controlados de acordo com a classificação

segundo o PEC, os erros inerentes à digitalização, o que diminui a confiabilidade dos dados. Por outro lado, a precisão dos instrumentos de medição e os modernos métodos de construção de cartas permitem construir documentos com precisão muito superior à dos produtos existentes na época da elaboração do PEC.

Uma das opções de representação 3-D do terreno em ambiente computacional é por meio da triangulação dos vértices descritores das curvas de nível, que pode ser realizada conforme a metodologia apresentada em MELLO e FERREIRA (2005). O terreno passa a ser representado por uma rede triangular irregular (TIN, de *Triangular Irregular Network*) que, por sua vez, define uma superfície composta pela justaposição dos triângulos que a compõem. BARBOSA (2006) apresenta uma metodologia para o registro das representações de feições planimétricas sobre uma TIN aplicando o conceito de coordenadas baricêntricas na interpolação dos valores de altitude dos vértices das figuras correspondentes (pontos, linhas e superfícies).

Entre as fontes de erro na interpolação, podem ser citadas a imprecisão dos dados cartográficos originais, as generalizações inerentes à construção da rede triangular (MELLO e FERREIRA, 2005) e os erros intrínsecos ao processo de digitalização e ao emprego da aritmética finita nos cálculos realizados em ambiente computacional (FREITAS, 2000) para determinação das coordenadas baricêntricas. Os três primeiros tipos de erro são ignorados na modelagem do terreno por não interferir diretamente no objetivo da visualização. A ocorrência do quarto tipo influencia a tomada de decisões no processo de registro de feições planimétricas (BARBOSA, 2006), uma vez que os valores calculados são comparados com valores pré-estabelecidos. Como esses erros residuais representam uma fração do terreno, resta saber o maior valor tolerável para que tais resíduos sejam considerados nulos, sem que a precisão na representação das feições seja comprometida. Neste trabalho será proposta a formulação para o estabelecimento de limites de tolerância para as coordenadas baricêntricas de modo que o reflexo da ocorrência dos erros do quarto tipo não exceda, no terreno, os limites estabelecidos pelo PEC.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Uma das soluções mais empregadas na representação digital de terrenos é a triangulação de Delaunay, normalmente construída sobre o fecho convexo composto pelos vértices das curvas de nível e pontos cotados, fontes de informações altimétricas. Neste caso, o terreno será representado como uma rede de triângulos irregulares, tecnicamente denominada TIN. A triangulação é construída com base em conceitos que envolvem grandezas bidimensionais. A atribuição do valor de um atributo (neste caso, a altitude) como terceira dimensão de cada vértice transforma uma rede de triângulos 2-D em um conjunto de triângulos 3-D. Em cada triângulo da TIN 3-D, irregularidades no

relevo cuja variação de altura é menor que a equidistância das curvas de nível são representadas sobre um mesmo plano.

Qualquer ponto P sobre um plano pode ter suas coordenadas descritas em função da combinação linear de três pontos não-colineares sobre esse plano. Os coeficientes usados nessa combinação linear, normalizados por definição, são denominados coordenadas baricêntricas (CARVALHO e FIGUEIREDO, 1991), representadas neste trabalho por  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$ . O sistema assim concebido permite estabelecer a posição relativa (interno, externo ou sobre o perímetro) entre um ponto definido em um espaço 2D e um triângulo definido pelos três pontos no espaço 3D, projetado no 2D. Isso se aplica na determinação de valores de atributos (de comportamento linear) de feições, conhecidos pontos em que os valores de tais atributos sejam conhecidos (BARBOSA, 2006). Pontos localizados sobre os lados de um triângulo possuem uma das coordenadas baricêntricas (aquela relativa ao vértice oposto ao lado) nula; pontos coincidentes com um dos vértices apresentam duas coordenadas baricêntricas (aqueles relativas aos demais vértices) nulas e, portanto, uma unitária. O cálculo das coordenadas  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  de um ponto P, em ambiente computacional, implica na solução de um sistema linear de três equações (equações 1, 2 e 3), conhecidas as coordenadas cartesianas ( $X_p$  e  $Y_p$ ), empregando a regra de Cramer (APOSTOL, 1985) por se tratar de um sistema de três equações e três incógnitas.

$$\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = X_p; \quad (1)$$

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3 = Y_p; \quad (2)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1; \quad (3)$$

Calculadas as coordenadas baricêntricas, pode-se interpolar o valor de  $Z_p$  em função dos valores de  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ . Porém, em BARBOSA (2006) foi observado que os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  apresentam imprecisões da ordem de  $10^{-12}$ , efeito do emprego da aritmética finita nos cálculos, como dito anteriormente. Isso influencia a tomada de decisões baseada na comparação de valores. Como exemplo, pode-se mencionar a verificação da pertinência de um ponto a um triângulo, ambos 2D: coordenadas baricêntricas não negativas implicam em o ponto estar contido no triângulo; se um valor deveria ser nulo e é negativo, mesmo muito pequeno, o sistema considera o ponto fora do triângulo. A solução proposta foi estabelecer limites de tolerância para as diferenças encontradas no cálculo das coordenadas baricêntricas.

O acréscimo de  $d\alpha$ ,  $d\beta$  e  $d\gamma$  aos coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente, produz o deslocamento ( $dX$ ,  $dY$  e  $dZ$ ) na posição do ponto P. Reescrevendo a expressão do maior deslocamento tolerável, chega-se a:

$$e_{max} = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2} \quad (4)$$

Extrapolando a equação 1 para a representação do deslocamento máximo, obtém-se:

$$dX_{max} = d\alpha X_1 + d\beta X_2 + d\gamma X_3$$

Analogamente:

$$dY_{max} = d\alpha Y_1 + d\beta Y_2 + d\gamma Y_3 ; e$$

$$dZ_{max} = d\alpha Z_1 + d\beta Z_2 + d\gamma Z_3$$

Embora a origem das discrepâncias seja a mesma, elas são independentes entre si, o que impede a determinação de uma expressão matemática única para definir os valores para cada uma delas. Para encontrar o valor máximo, parte-se da hipótese que  $d\alpha$ ,  $d\beta$  e  $d\gamma$  têm o mesmo valor e que são máximos. Com isso, pode-se substituir  $d\alpha$ ,  $d\beta$  e  $d\gamma$  por  $d\alpha_{XYZ}$ . Assim:

$$dX_{max} = d\alpha_{XYZ}(X_1 + X_2 + X_3) ;$$

$$dY_{max} = d\alpha_{XYZ}(Y_1 + Y_2 + Y_3) ;$$

$$dZ_{max} = d\alpha_{XYZ}(Z_1 + Z_2 + Z_3) ;$$

Com base no exposto, a equação 4 assume a forma:

$$e_{max} = \sqrt{d\alpha_{XYZ}^2(X_1 + X_2 + X_3)^2 + d\alpha_{XYZ}^2(Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 + d\alpha_{XYZ}^2(Z_1 + Z_2 + Z_3)^2}$$

Evidenciando  $\alpha_{XYZ}$ :

$$e_{max} = d\alpha_{XYZ} \sqrt{(X_1 + X_2 + X_3)^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2}$$

$$d\alpha_{XYZ} = \frac{e_{max}}{\sqrt{(X_1 + X_2 + X_3)^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2}} \quad (5)$$

A aplicação geodésica da equação 5 consiste em assumir a equivalência entre  $e_{max}$  e os limites estabelecidos pelo PEC planimétrico, uma vez que tanto a triangulação de Delaunay e as grandezas mensuradas para estabelecer a classificação da carta segundo o PEC planimétrico estão no domínio bidimensional. RAPP (1984) apresenta a transformação das coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$  e  $h$ ) para cartesianas (X, Y e Z), que podem ser aplicadas na equação 5.

$$X = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda; \quad (6)$$

$$Y = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda; \quad (7)$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \cdot \sin\varphi; \quad (8)$$

onde:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (9)$$

Substituindo as coordenadas cartesianas por coordenadas geodésicas curvilíneas no cálculo das coordenadas baricêntricas, chega-se a valores bem próximos àqueles calculados com as coordenadas cartesianas. No entanto, quando são computados valores angulares, torna-se necessário relacionar  $e_{max}$  com latitude e longitude. Desta forma,  $e_{max}$  passa a ser o comprimento da linha geodésica descrita sobre o elipsóide de revolução ou, devido à sua dimensão relativamente reduzida, a um arco de circunferência sobre a esfera que atende ao teorema de Gauss: seu raio é a média de todos os raios de curvatura da primeira superfície (o elipsóide de revolução), aplicando o teorema do valor médio à relação de Euler para cálculo de raios de curvatura de seções planas do elipsóide de revolução (RAPP, 1991). O comprimento do raio é dado pela equação 10, função do semi-eixo maior  $a$  e da excentricidade  $e$  do elipsóide de revolução, assim como do valor  $\varphi$  do paralelo de latitude do ponto P.

$$R_m = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (10)$$

O ângulo  $\theta$  que o ponto P faz com o ponto deslocado correspondente é obtido pela divisão de  $e_{max}$  pelo raio médio. Outra simplificação possível por conta da dimensão do deslocamento produzido é assumir  $\theta$  como a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são os acréscimos aos valores de latitude e de longitude. Face a esta suposição, o valor de  $\theta$  será dado pela equação 11.

$$\theta = \sqrt{d\varphi^2 + d\lambda^2} \quad (11)$$

Assim,

$$e_{max} = R_m \cdot \theta \quad (12)$$

Seguindo pelo mesmo raciocínio adotado na dedução da equação 5, pode-se afirmar que as variações de latitude e longitude podem ser determinadas em função das coordenadas baricêntricas relativas às coordenadas curvilíneas dos vértices do triângulo. Associando as equações 11 e 12 e substituindo da,  $d\beta$  e  $d\gamma$  por  $da_{\varphi\lambda h}$ :

$$e_{max} = R_m d\alpha_{\varphi\lambda h} \sqrt{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} \quad (13)$$

$$d\alpha_{\varphi\lambda h} = \frac{e_{max}}{R_m \sqrt{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2}} \quad (14)$$

A razão entre as coordenadas baricêntricas  $d\alpha_{XYZ}$  e  $d\alpha_{\varphi\lambda h}$  é função das coordenadas geodésicas cartesianas e geodésicas dos vértices do triângulo. Portanto, espera-se que a relação entre  $d\alpha_{XYZ}$  e  $d\alpha_{\varphi\lambda h}$  seja constante para qualquer ponto de um triângulo:

$$\frac{d\alpha_{XYZ}}{d\alpha_{\varphi\lambda h}} = R_m \sqrt{\frac{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2}{(X_1 + X_2 + X_3)^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2}} \quad (15)$$

### 3. TESTES

A fim de analisar a aplicabilidade das expressões apresentadas na seção anterior, foi montado um caso em que o triângulo de teste é definido pelos vértices A, B e C, cujas coordenadas curvilíneas (no sistema geodésico *South American Datum of 1969*) e cartesianas apresentadas na tabela 1.

Os cálculos foram realizados em uma planilha no software Calc®, do pacote KuruminOffice versão 1.1.2, instalado em computador com processador Intel Pentium 4, *clock* de 3.2GHz e 1GB de memória RAM. O sistema operacional é o Linux, distribuição Poseidon, desenvolvida pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Tabela 1 - Coordenadas dos vértices do triângulo empregado nos testes.

	A	B	C
$\varphi$ (rad)	-0,3859214	-0,3859505	-0,3859359
$\lambda$ (rad)	-0,7372416	-0,7372174	-0,7372028
$h$ (m)	0,000	0,000	0,000
X (m)	4376704,465	4376749,370	4376832,887
Y (m)	-3974240,658	-3974087,862	-3974047,555
Z (m)	-2385881,212	-2402133,374	-2402047,308

Inicialmente, a substituição dos valores propostos na tabela 1, nas equações 5 e 14 retorna os maiores valores de resíduos toleráveis no cálculo das coordenadas baricêntricas (de acordo com uma carta classe A segundo o PEC planimétrico) para  $da_{XYZ}$  e  $da_{\phi\lambda h}$ , organizados na tabela 2, segundo a escala de construção do documento e o sistema de coordenadas.

O passo seguinte consiste em analisar o comportamento das coordenadas baricêntricas quando o ponto está sobre um dos lados. Nessa análise serão testados pontos espalhados ao longo do lado estudado, variando a coordenada baricêntrica esperada. Por se tratarem de lados, uma das coordenadas é necessariamente nula e a soma das outras vale 1. Se o ponto coincide com um dos vértices, duas coordenadas baricêntricas são nulas e a outra é igual a 1.

Tabela 2 - Desvios máximos admissíveis no cálculo de coordenadas baricêntricas.

<i>Escala da Carta</i>	$e_{max} (m)$	$da_{XYZ}$	$da_{\phi\lambda h}$	$da_{XYZ} / da_{\phi\lambda h}$
1:2000	1	5,2286E-008	6,2956E-008	8,3052E-001
1:10.000	5	2,6143E-007	3,1478E-007	8,3052E-001
1:25.000	12,5	6,5358E-007	7,8695E-007	8,3052E-001
1:50.000	25	1,3072E-006	1,5739E-006	8,3052E-001
1:100.000	50	2,6143E-006	3,1478E-006	8,3052E-001
1:250.000	125	6,5358E-006	7,8695E-006	8,3052E-001

Para montar a tabela 3 foram posicionados pontos sobre o lado AB do triângulo, variando os pesos atribuídos às coordenadas geodésicas cartesianas dos vértices. Então, para cada um dos pontos, foram calculadas na planilha as respectivas coordenadas baricêntricas. Teoricamente, as coordenadas baricêntricas calculadas devem coincidir com os pesos aplicados, porém os resíduos embutidos nos cálculos fazem que tais valores não coincidam. Os valores apresentados nesta tabela são as diferenças entre os pesos aplicados e as coordenadas baricêntricas calculadas.

Tabela 3. Diferenças encontradas no cálculo das coordenadas baricêntricas ao longo do lado AB do triângulo, ponderando as coordenadas cartesianas dos vértices.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$d\alpha$	$d\beta$	$d\gamma$
1	0	0	1,9177E-011	0,0000E+000	-0,0000E+000
0,9	0,1		2,3444E-011	-8,6060E-012	-0,0000E+000
0,8	0,2		1,7403E-011	2,6218E-011	
0,7	0,3		1,1363E-011	1,5525E-011	
0,6	0,4		1,5629E-011	-4,8289E-012	
0,5	0,5		1,9895E-011	-1,0904E-011	
0,4	0,6		1,3855E-011	1,2395E-011	
0,3	0,7		7,8146E-012	1,3283E-011	
0,2	0,8		1,2081E-011	1,8311E-011	
0,1	0,9		6,0404E-012	1,9065E-011	
0	1	0	-0,0000E+000	1,4424E-011	-0,0000E+000

Aplicando o mesmo método e variando os pesos, partindo do vértice A e percorrendo o perímetro do triângulo (passando por B e C, e retornando ao vértice A). Os resultados obtidos foram organizados no gráfico ilustrado na figura 1.

Semelhantemente, para montar a tabela 4 foram posicionados pontos sobre o lado AB do triângulo, ponderando as coordenadas geodésicas curvilíneas dos vértices. Como no processo da tabela 3, são apresentadas as diferenças entre os pesos aplicados e as coordenadas baricêntricas calculadas. A figura 2 exibe o gráfico análogo ao da figura 1, porém com as diferenças obtidas empregando este critério.

Nos valores exibidos nos processos descritos, não se observa tendência. Entretanto, todos os valores encontram-se abaixo dos valores de tolerância apresentados na tabela 1, inclusive na maior escala. Além destes dois testes, em que foram utilizados pontos sobre a superfície do elipsóide, foram realizados outros, modificando-se as alturas dos pontos em intervalos iguais à equidistância da curvas de nível. Foram observadas discrepâncias da mesma ordem de grandeza daquelas apresentadas nas tabelas 3 e 4.

Figura 1 - Gráfico das discrepâncias encontradas no cálculo das coordenadas baricêntricas com base nas coordenadas cartesianas dos vértices.

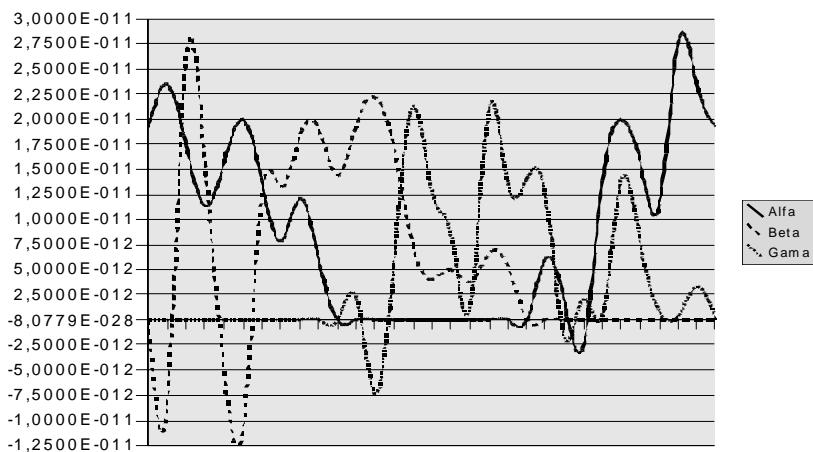
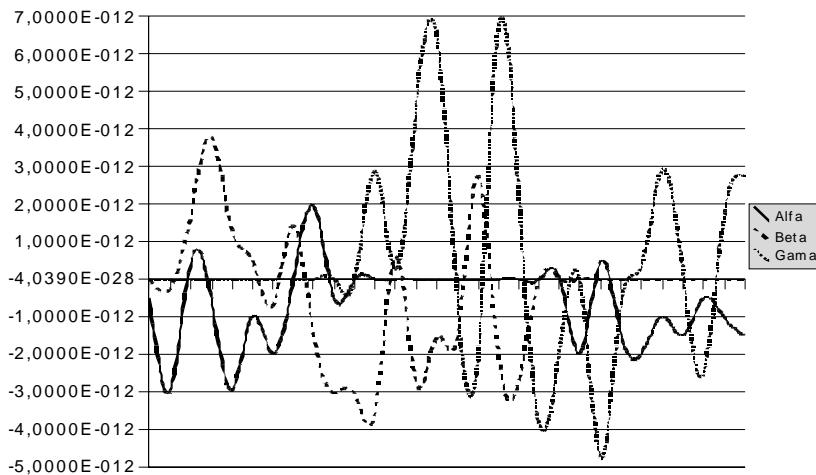


Tabela 4 - Diferenças encontradas no cálculo das coordenadas baricêntricas ao longo do lado do triângulo, ponderando as coordenadas cartesianas dos vértices.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$d\alpha$	$d\beta$	$d\gamma$
1	0	0	-5,2780E-013	-0,0000E+000	0,0000E+000
0,9	0,1		-2,9614E-012	-2,3781E-013	
0,8	0,2		4,5519E-013	1,7335E-012	
0,7	0,3		-5,1559E-013	3,7978E-012	
0,6	0,4		-2,9492E-012	1,3253E-012	
0,5	0,5		-9,9520E-013	5,0804E-013	-0,0000E+000
0,4	0,6		-1,9662E-012	-6,8945E-013	
0,3	0,7		-1,2046E-014	1,4274E-012	
0,2	0,8		1,9420E-012	-1,5101E-012	
0,1	0,9		-4,9155E-013	-3,0115E-012	
0	1	0	0,0000E+000	-3,0600E-012	0,0000E+000

Figura 2 - Gráfico das discrepâncias encontradas no cálculo das coordenadas baricêntricas com base nas coordenadas curvilíneas dos vértices.



Um exemplo prático é que, para um ponto ser considerado vértice, uma das coordenadas baricêntricas precisa ter valor unitário. Como visto na tabela 3, os resíduos alteram o valor da coordenada baricêntrica, significando que a condição não foi atendida, muito embora o ponto seja o mesmo. Assim, a busca por um triângulo que satisfaça essa condição pode terminar sem apontar nenhum, interrompendo o processo prematuramente. Neste caso, a solução passa a ser a verificação da pertinência do valor calculado da coordenada ao intervalo definido ao redor do valor esperado, e de extensão igual aos valores dados pela tabela 2, mantendo a precisão do documento cartográfico de origem.

Nos cálculos também foi observado que a razão entre as coordenadas baricêntricas obtidas com os dados expressos em coordenadas curvilíneas e aquelas obtidas com dados expressos em coordenadas cartesianas difere de 1 por valores da ordem de  $10^{-12}$ . A implicação deste fato é a diferença encontrada no valor interpolado de  $Z_p$ , empregando  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  calculados a partir dos dois conjuntos de coordenadas dos vértices. Em ambos os casos, a maior variação de  $Z_p$  decorrente dos erros apontados nas tabelas 4 e 5 é da ordem do décimo de milímetro, havendo valores positivos e negativos. Valores negativos implicam em pontos sob a rede, ou seja, pontos que se tornarão ocultos no momento da visualização. Mesmo que o valor de  $Z_p$  seja armazenado com 3 casas decimais, ainda corre-se o risco de a aproximação figurar abaixo da superfície da TIN. O acréscimo de 1,0mm nos valores não afetará a sensação visual de ajuste dos pontos acima da superfície da TIN e será suficiente para tornar visíveis pontos antes representados abaixo dela.

## 4. CONCLUSÕES

Observou-se que os valores das coordenadas baricêntricas calculados e exibidos pela planilha são diferentes entre si. Tais diferenças, embora pequenas, são interpretadas pelo sistema como não nulas, influenciando o processo de tomada de decisões baseada em comparação direta destes valores com outros pré-estabelecidos. Entretanto, com base no que foi exposto, conclui-se que os valores de tolerância calculados pelas equações 5 e 14 podem ser empregados com segurança na análise de casos limítrofes (pontos sobre vértices e lados), eliminando a influência da imprecisão numérica presente no cálculo das coordenadas baricêntricas e na comparação entre pontos, operações fundamentais para a metodologia proposta em BARBOSA (2006). Pôde-se concluir também que as coordenadas baricêntricas calculadas com valores angulares podem ser empregadas na interpolação linear de atributos, como se cartesianas fossem. Concluiu-se também que, para fins de visualização tridimensional, o acréscimo de 1,0mm à altura interpolada é suficiente para compensar o efeito das imprecisões no caso de ocorrerem vértices posicionados abaixo da superfície da TIN. Para outras aplicações, os valores calculados podem ser empregados sem transformações.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APOSTOL, T. M. *Cálculo: Cálculo com funções de varias variáveis e Álgebra Linear, com aplicações às equações diferenciais e às provabilidades*. Barcelona: Reverté, 1985. 771 p. v.1.
- BARBOSA, I. *Interpolação de atributos para registro de feições bidimensionais sobre superfícies, empregando modelo linear*. 89f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Cartográfica) – Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2006.
- BRASIL. *Decreto nº 89.817 de 20 de junho de 1984*. Estabelece as Instruções Reguladoras das Normas Técnicas da Cartografia Nacional [online]. Diário Oficial da União, Brasília, 22 jun. 1984, Disponível em <<http://www.concar.ibge.gov.br/indexf7a0.html?q=node/41>>. Acesso em: 10 Set. 06.
- CARVALHO, P. C. P.; FIGUEIREDO, L. H. *Introdução à Geometria Computacional*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1991.
- FREITAS, S. R. *Métodos Numéricos* [online], Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2000. 224 p. Disponível em <[http://twiki.im.ufba.br/pub/MAT174/Arquivos/livro\\_metodos.pdf](http://twiki.im.ufba.br/pub/MAT174/Arquivos/livro_metodos.pdf)>. Acesso em 20 Out. 06.

MELLO, F. L.; FERREIRA da S. L. F. C. Visualização tridimensional de terrenos: triangulação de dados altimétricos, *Revista Militar de Ciência e Tecnologia*, 2º Quadrimestre de 2005.

RAPP, R. H. *Geometric Geodesy* - Part 1. Columbus: The Ohio State University, 1991. 178 p.

(Recebido em maio/07. Aceito em outubro/07)