

# DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS USANDO UMA MATRIZ COVARIÂNCIA ESTIMADA POR MEIO DA COLOCAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

*Coordinate transformation by the use of a matrix covariance estimated by  
least square collocation*

MOISÉS FERREIRA COSTA<sup>1</sup>  
MARCELO CARVALHO DOS SANTOS<sup>2</sup>  
LUIZ DANILO DAMASCENO FERREIRA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal de Viçosa - UFV  
Departamento de Engenharia Civil  
E-mail: moises@ufv.br

<sup>2</sup> University of New Brunswick - UNB  
Department of Geodesy and Geomatics Engineering  
E-mail: msantos@unb.ca

<sup>3</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
E-mail: luizdanilo@ufpr.br

## RESUMO

A Colocação por Mínimos Quadrados tem sido utilizada em Geodésia principalmente para modelagem do campo da gravidade terrestre. Este trabalho mostra uma aplicação da colocação na transformação de coordenadas envolvendo duas realizações do SAD69 no Brasil. A transformação de similaridade no espaço tridimensional considerando translação, rotação e diferença de escala é o modelo utilizado para estimativa dos parâmetros. Na metodologia apresentada e testada com 200 pontos da Rede Geodésica Brasileira, o efeito da correlação foi estabelecido por meio de uma função covariância Gaussiana modelada a partir dos dados. A avaliação dos resultados pôde ser feita pela comparação das diferenças entre as coordenadas estimadas tanto pelo ajustamento quanto pela colocação e os valores de referência, isto é, os valores conhecidos. Para isto foram utilizados todos os 200 pontos como teste retirando um ponto a cada etapa e testado individualmente. Esta aplicação prática mostrou como os resultados do

ajustamento podem ser melhorados pelo uso de uma função covariância apropriada para observações correlacionadas.

**Palavras-chave:** Colocação por Mínimos Quadrados; Transformação de Coordenadas; Correlação.

## ABSTRACT

Least Squares Collocation has been used in Geodesy mostly for the modelling of the Earth's gravity field. This investigation makes use of Least Squares Collocation dealing with coordinate transformation between two realizations of the South American Datum (SAD-69) in Brazil. The similarity transformation in the tri-dimensional space, involving translations, rotations and scale, is the model adopted for the parameter estimation. In the present methodology, 200 points of the Brazilian Geodetic System have been tested. The effect of correlation was established by means of a Gaussian covariance function modelled from the data. The assessment of the results is carried out by comparison of differences between coordinates estimated using Least Squares Adjustment and Least Squares Collocation and reference values, i.e., known values. This involved all 200 points, used individually in each test. At each test, one of the 200 points is removed and used as a test point. The tests show how much results traditionally supplied by Least Squares Adjustment can be improved by using a covariance function appropriate to correlated observations.

**Key words:** Least Squares Collocation; Coordinate Transformation; Correlation.

## 1. INTRODUÇÃO

A realização prática de um referencial consiste da determinação das coordenadas de um conjunto de pontos sobre a superfície física da Terra. Para propósitos práticos é necessário que os diversos referenciais realizados possam se relacionar mediante alguma equação de transformação. Todavia, devido aos erros inerentes ao próprio processo de medida, estes são propagados para as coordenadas atreladas a um referencial materializado causando distorções na rede.

Segundo SCHWARZ (1974, p. 171), devido à natureza dos dados originais, a heterogeneidade das técnicas observacionais e ao modelo matemático que relaciona estas quantidades, é improvável que as coordenadas estimadas sejam obtidas de uma maneira simples.

O método de colocação tem sido aplicado para resolver problemas relacionados com diversas áreas do conhecimento, dentre as quais a Geodésia, Fotogrametria, Ciências Aplicadas e Engenharia (KRAUS e MIKHAIL, 1972, p. 1016; MIKHAIL, 1976, p. 394; RAMPAL, 1976, p. 559).

Em Geodésia, a colocação tem sido utilizada principalmente para modelagem do campo da gravidade terrestre (MORITZ, 1973; MORITZ,

1978; MORITZ e SÜNKEL, 1978; MORITZ, 1980; ANDERSON et al., 2000) e em Fotogrametria têm sido aplicada na correção da deformação do filme e distorção das lentes (CAMARGO e DALMOLIN, 1995; KRAUS e MIKHAIL, 1972; RAMPAL, 1976). A grande vantagem deste método é que ele permite a combinação de diferentes tipos de dados no mesmo modelo matemático.

O objetivo deste trabalho é descrever uma metodologia para transformação de coordenadas na qual a matriz covariância das observações é estimada por colocação, onde as distorções sistemáticas são modeladas e os erros das observações são filtrados. Também é feita uma comparação entre os resultados do ajustamento e da colocação.

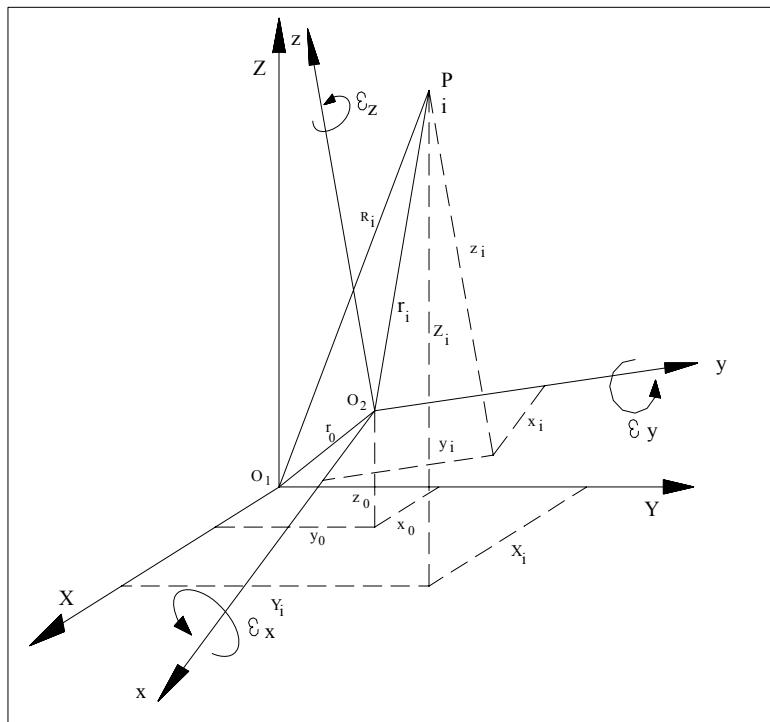
A equação da colocação é formada por uma parte determinística e duas partes aleatórias constituindo o sinal e o ruído. No presente trabalho, a parte determinística é constituída pela transformação geométrica, o sinal representa as distorções sistemáticas e o ruído constitui os erros das observações. O efeito da correlação entre as observações é estabelecido por meio de uma função covariância apropriada permitindo tratar os dados de uma maneira consistente.

## **2. MODELO MATEMÁTICO PARA TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA**

O modelo matemático de transformação usado para esta aplicação é a transformação de similaridade no espaço tridimensional. Ela é também chamada de transformação isogonal, conforme ou de Helmert (LUGNANI, 1987, p.102). O modelo matemático desta transformação contém sete parâmetros e expressa o relacionamento entre dois referenciais por meio de três translações, três rotações e um fator de escala.

A Figura 2.1 mostra o relacionamento entre dois referenciais cartesianos tridimensionais, no qual o vetor posição de um ponto genérico  $P_i$  no referencial cartesiano ( $X, Y, Z$ ) é dado por  $\mathbf{R}_i$  e o vetor posição do mesmo ponto no referencial cartesiano ( $x, y, z$ ) é dado por  $\mathbf{r}_i$ . As translações representadas por  $(x_0, y_0, z_0)$  entram para compor o vetor  $\mathbf{r}_0$  e as rotações representadas por  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$  podem ser expressas convenientemente por matrizes de rotação fundamentais. O parâmetro ( $\kappa$ ) é utilizado para expressar o fator de escala da transformação.

Figura 2.1 – Transformação no espaço tridimensional.



O modelo matemático da transformação de similaridade no espaço é dado, para qualquer ponto genérico  $P_i$ , por:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_0 + \kappa \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{r}_i, \quad (2.1)$$

na qual a matriz  $\mathbf{R}_\varepsilon$  é expressa convenientemente na forma:

$$\mathbf{R}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde as rotações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  são dadas em radianos.

Para aplicação da transformação de similaridade no espaço é necessário que as coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) sejam transformadas em suas

correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z). Detalhes a respeito desta transformação devem ser consultados em: VINCENTY (1965, p. 129); TORGE (2001, p. 100).

O fator de escala  $\kappa$  pode ser escrito como:

$$\kappa = 1 + \delta, \quad (2.3)$$

onde  $\delta$  representa uma diferença de escala (LAMBECK, 1971, p. 38; GEMAEL, 1981, p. 4.17). A equação (2.3) mostra que se os dois referenciais possuem o mesmo padrão linear, isto é, uma métrica homogênea, então a diferença de escala  $\delta$  deve ser nula e o fator de escala  $\kappa$  igual à unidade.

Agora, convém substituir as equações (2.2) e (2.3) na equação (2.1) para expressar o modelo geral na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{Z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

No atendimento ao objetivo proposto, o modelo matemático expresso pela equação (2.4) será utilizado tanto na sua forma direta quanto na sua forma inversa. Antes da utilização do modelo na sua forma direta, primeiro é necessário formular sistemas de equações tendo em vista a estimativa dos sete parâmetros de transformação, o que constitui a sua forma inversa. Para isto, as equações são formuladas com base nas coordenadas de pontos comuns (pontos de observação) conhecidas em ambas às realizações. A forma direta do modelo consiste na estimativa das coordenadas ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) a partir das coordenadas ( $x_i, y_i, z_i$ ) e dos parâmetros estimados na sua forma inversa.

### 3. COLOCAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

#### 3.1. Modelo Matemático

O método de estimativa conhecido como Colocação por Mínimos Quadrados é uma generalização ou extensão do Ajustamento por Mínimos Quadrados (MORITZ, 1973, p. 2). Ele combina, sob o critério do MMQ, o Ajustamento, a Filtragem e a Interpolação (GEMAEL, 1994, p. 267). O leitor interessado em maiores detalhes sobre a teoria da estimativa e filtragem deve consultar: JAZWINSKI (1970); GELB *et al.* (1974); KRAKIWSKY (1975) e MIKHAIL (1976).

O modelo básico da colocação é dado por (MORITZ, 1972, p. 7; KRAKIWSKY, 1975, p. 60), o qual dimensionado para a aplicação de interesse assume a forma:

$${}_{3q} \mathbf{L}_{b1} = {}_{3q} \mathbf{A}_{uu} \mathbf{X}_{a1} + {}_{3q} \mathbf{s}'_1 + {}_{3q} \mathbf{n}_1, \quad (3.1)$$

onde:

$L_b$  – representa o vetor das observações;  
 $A$  – matriz das derivadas parciais;  
 $X_a$  – vetor de parâmetros ajustados;  
 $n$  – vetor dos ruídos (erros das observações);  
 $s'$  – vetor dos sinais nos  $q$  pontos de observação;  
 $q$  – número de pontos de observação;  
 $u$  – número de parâmetros a serem estimados.

Pela equação (3.1), tem-se que uma observação é formada por três componentes, isto é, uma componente sistemática  $A \cdot X_a$  e duas componentes aleatórias  $n$  e  $s'$  (MORITZ, 1973, p. 5). A matriz  $A$  expressa o efeito dos parâmetros  $X_a$  nas observações  $L_b$ . A componente sistemática  $A \cdot X_a$  é aquela que pode ser representada por algum modelo matemático, sendo denominada de parte modelada da observação. As componentes aleatórias  $n$  e  $s'$  representam a parte não modelada.

Nos problemas de transformações de coordenadas, como é o caso do presente estudo, a parte sistemática  $A \cdot X_a$  representa o modelo matemático de transformação expresso pela equação (2.4), a parte aleatória  $n$  constitui os erros das observações e  $s'$  são as distorções sistemáticas residuais.

Segundo SCHWARZ (1974, p. 173), o sinal  $s'$  representa o efeito integrado de diferentes influências, tais como a inadequabilidade do modelo matemático, distorções locais das redes, etc.

Por conveniência, é comum introduzir um novo vetor aleatório  $z$  representando o efeito integrado do sinal  $s'$  e do ruído  $n$ , de maneira que:

$${}_{3q} Z_1 = {}_{3q} s' + {}_{3q} n_1, \quad (3.2)$$

Agora, recorrendo à equação (3.2), pode-se reescrever a equação (3.1) como:

$${}_{3q} L_{b1} = {}_{3q} A_{uu} X_{a1} + {}_{3q} Z_1. \quad (3.3)$$

Na interpolação, o interesse é estimar o sinal  $s$  para os  $p$  pontos diferentes daqueles de observação, isto é, estimar o sinal  $s$  nos  $p$  pontos de cálculo e é neles que o sinal  $s$  é dito ser “predito”.

O vetor dos sinais  $s$  nos  $p$  pontos de cálculo combinado com o vetor aleatório  $z$ , resulta em um novo vetor  $v$  na forma:

$${}_{3p+3q} V_1 = \begin{bmatrix} {}_{3p} s_1 \\ {}_{3q} Z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

o qual permite reescrever a equação (3.3) como:

$${}_{3q} L_{b1} = {}_{3q} A_{uu} X_{a1} + {}_{3q} B_{3p+3q} {}_{3p+3q} V_1. \quad (3.5)$$

A matriz  $B$  da equação (3.5) assume a forma:

$${}_{3q} \mathbf{B}_{3p+3q} = \begin{bmatrix} 0_{3p} & {}_{3q} \mathbf{I}_{3q} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde a matriz  ${}_{3q} 0_{3p}$  é uma matriz nula e a matriz  ${}_{3q} \mathbf{I}_{3q}$  representa uma matriz identidade.

Na equação (3.5), o termo  $A \cdot X_a$  pode ser substituído pelo seu equivalente  $L_0 + A \cdot X$ , de modo que:

$${}_{3q} \mathbf{A}_{u u} \mathbf{X}_1 + {}_{3q} \mathbf{B}_{3p+3q} {}_{3p+3q} \mathbf{v}_1 + {}_{3q} \mathbf{W}_1 = 0, \quad (3.7)$$

onde o vetor  $W$  é dado pela diferença  $L_0 - L_b$ , a matriz  $A$  é a matriz das derivadas parciais, a matriz  $B$  é dada pela equação (3.6), o vetor  $v$  pela equação (3.4) e o vetor  $X$  representa os parâmetros incógnitos a serem estimados.

### 3.2. Função Covariância

A aplicação da Colocação por Mínimos Quadrados requer a escolha da função covariância e sua modelagem. Alguns trabalhos pertinentes têm relatado seu uso para diversos propósitos. É o caso da aplicação em correção da deformação do filme (KRAUS e MIKHAIL, 1972, p. 1027; CAMARGO e DALMOLIN, 1995), em filtragem de dados (THÉRIAULT, 1995) e predição de anomalias da gravidade (ARGESEANU, 1986; BIAN e MENZ, 1999; ANDERSON et al., 2000).

Segundo MORITZ (1972, p. 57 e 58), a função covariância:

$$C(r) = C_0 e^{-a^2 \cdot r^2}, \quad (3.8)$$

com valores adequados de  $C_0$  e “a”, fornece uma simples expressão analítica que pode ser apropriada em muitos casos.

A função covariância Gaussiana foi escolhida devido a sua capacidade de representar dados com distribuição normal. Na equação (3.8),  $r$  denota a distância entre dois pontos considerados e  $C(r)$  é a covariância entre eles.

Uma função covariância pode ser caracterizada por meio de três parâmetros essenciais, a saber (MORITZ, 1976, p. 22; MORITZ, 1978, p. 424; MORITZ, 1980, p. 174): a variância  $C_0$ ; a distância de correlação  $\xi$  (“correlation length”) e o parâmetro de curvatura  $\chi$  (“curvature parameter”).

A variância  $C_0$  é o valor da função covariância  $C(r)$  para o argumento  $r = 0$  na equação (3.8), de modo que:

$$C(0) = C_0. \quad (3.9)$$

A distância de correlação  $\xi$  é o valor do argumento para  $C(r)$  que decresce seu valor para metade de  $C_0$ , isto é:

$$C(\xi) = \frac{C_0}{2}. \quad (3.10)$$

O parâmetro de curvatura  $\chi$  é definido como:

$$\chi = \frac{k\xi^2}{C_0}. \quad (3.11)$$

### 3.3. Matriz Covariância

As incógnitas envolvidas na equação (3.7) podem ser estimadas utilizando o critério do MMQ e minimizando a soma dos quadrados dos “resíduos” ponderados por:

$$\phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \text{mínimo}, \quad (3.12)$$

onde o vetor  $v$  é dado pela equação (3.4) e  $P$  é interpretada como matriz peso para a colocação.

A matriz dos coeficientes de peso, também denominada de matriz cofatora  $Q$  é dada por (MORITZ e SÜNKEL, 1978, p. 55):

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum v, \quad (3.13)$$

e a matriz dos pesos  $P$  fica obtida como:

$$_{3p+3q} \mathbf{P}_{3p+3q} = Q^{-1} = \sigma_0^2 \sum v^{-1}. \quad (3.14)$$

Por definição, os vetores  $s'$ ,  $n$  e  $z$  são vetores aleatórios com média nula e respectivas MVC's definidas como:

$$\Sigma_{s'} = \text{cov}(s', s') = E\{s' s'^T\}; \quad (3.15)$$

$$\Sigma_n = \text{cov}(n, n) = E\{n n^T\}; \quad (3.16)$$

$$\Sigma_z = \text{cov}(z, z) = E\{z z^T\}. \quad (3.17)$$

A MVC do vetor aleatório  $z$ , dada pela equação (3.17), é obtida pela soma da MVC do sinal  $s'$  com a MVC do ruído  $n$ , a qual é igual a MVC das observações  $L_b$  e dada por (CAMARGO e DALMOLIN, 1995, p. 7):

$$\Sigma_z = \Sigma_{L_b} = \Sigma_{s'} + \Sigma_n, \quad (3.18)$$

desde que o ruído  $n$  não tenha correlação com o sinal  $s'$  (MORITZ, 1972, p. 11; KRAKIWSKY, 1975, p. 64 e GEMAEL, 1994, p. 270).

A informação sobre a correlação entre as observações  $L_b$  é expressa pela MVC do sinal  $s'$ , uma vez que os ruídos não são correlacionados entre si. Este relacionamento é expresso na equação (3.18).

A MVC do vetor aleatório  $v$  definido na equação (3.4) é dada por (MORITZ, 1972, p. 9; CAMARGO e DALMOLIN, 1995, p. 8):

$$\Sigma_v = \begin{bmatrix} \Sigma_s & \Sigma_{sZ} \\ \Sigma_{zs} & \Sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_s & \Sigma_{SL_b} \\ \Sigma_{L_bS} & \Sigma_{L_b} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde:

$\Sigma_s$  – MVC do sinal s nos p pontos de cálculo;

$\Sigma_{L_b}$  – MVC das observações  $L_b$ ;

$\Sigma_{SL_b}$  – Matriz covariância cruzada entre o sinal s e as observações  $L_b$ .

Vale ainda a seguinte relação (GEMAEL, 1994, p. 271; CAMARGO e DALMOLIN, 1995, p. 8):

$$\Sigma_{SL_b} = \Sigma_{ss'} \quad (3.20)$$

$$\Sigma_{L_bS} = \Sigma_{SL_b}^T. \quad (3.21)$$

Das equações (3.14) e (3.19) pode-se obter a matriz dos pesos para a colocação como:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_s & \Sigma_{SL_b} \\ \Sigma_{L_bS} & \Sigma_{L_b} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.22)$$

As matrizes  $\Sigma_s$ ,  $\Sigma_{s'}$  e  $\Sigma_{ss'}$  podem ser obtidas a partir da, assim chamada, função covariância dada pela equação (3.8). De acordo com MIKHAIL (1976, p. 399), a função covariância pode ser teoricamente conhecida ou pode ser derivada experimentalmente a partir dos dados. Detalhes a respeito da modelagem da função covariância devem ser consultados em: MIKHAIL (1976); COSTA (2003).

A função covariância  $C$  pode ser teoricamente conhecida ou pode ser derivada a partir das observações pela estimativa das variâncias e covariâncias amostrais. As variâncias e covariâncias amostrais estimadas a partir das observações, são dadas por (MIKHAIL, 1976, p. 42 e 43):

$$C_i(0) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left( l_k - \bar{l} \right)^2; \quad (3.23)$$

$$C_i(\Delta) = \frac{1}{n_k-1} \sum_{i < j} \left( l_i - \bar{l} \right) \cdot \left( l_j - \bar{l} \right), \quad (3.24)$$

onde  $n$  é o número total de observações,  $n_k$  são as observações contidas em um intervalo no qual as covariâncias serão estimadas,  $l_i$ ,  $l_j$  e  $l_k$  são as observações propriamente ditas e  $\bar{l}$  é a sua média.

### 3.4. Solução das Estimativas por Colocação

Além de minimizar a função  $v^T P v$  dada pela equação (3.12), as equações normais relacionando as quantidades desconhecidas  $v$ ,  $K$  e  $X$  para as quantidades conhecidas  $P$ ,  $A$ ,  $B$  e  $W$  são obtidas a partir da seguinte função de variação:

$$\phi(v, K, X) = v^T P v - 2K^T (AX + BV + W), \quad (3.25)$$

onde  $K$  é um vetor dos chamados multiplicadores de Lagrange.

As expressões de cálculo são dadas dimensionadas para a aplicação atual. As estimativas para os vetores  $X$ ,  $K$  e  $v$  são dadas por (COSTA, 2003, p. 34 a 36):

$$_u X_1 = - \left[ _u A_{3q}^T (\Sigma_{Lb})_{3q}^{-1} _u A_u \right]^{-1} \left[ _u A_{3q}^T (\Sigma_{Lb})_{3q}^{-1} W_1 \right] \quad (3.26)$$

$$_{3q} K_1 = - (\Sigma_{Lb})_{3q}^{-1} ( _{3q} A_u u X_1 + _{3q} W_1). \quad (3.27)$$

$$_{3p+3q} v_1 = \begin{bmatrix} _{3p} s_1 \\ _{3q} z_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_{SL_b} \\ \sum_{L_b} \end{bmatrix} (\Sigma_{Lb})^{-1} (AX + W), \quad (3.28)$$

O vetor  $X_a$  dos parâmetros ajustados pode ser estimado por:

$$X_a = X_0 + X, \quad (3.29)$$

onde  $X_0$  é o vetor dos parâmetros aproximados.

A estimativa para o vetor  $v$  foi dada pela equação (3.28). De forma a explicitar o sinal  $s$  nos  $p$  pontos de cálculo e o vetor  $z$ , tem-se:

$$_{3p} s_1 = - \sum_{SL_b} (\Sigma_{Lb})^{-1} (AX + W); \quad (3.30)$$

$$_{3q} z_1 = -(AX + W). \quad (3.31)$$

O vetor  $z$  estimado pela equação (3.31) representa o efeito integrado do sinal  $s'$  e do ruído  $n$  nos  $q$  pontos de observação como mostra a equação (3.2). Assim, além do vetor dos parâmetros  $X_a$  e do vetor dos sinais  $s$ , pode-se obter uma estimativa para o sinal  $s'$  e para o ruído  $n$ , respectivamente, por (KRAKIWSKY, 1975, p. 80):

$$_{3q} s'_1 = - \sum_{s'} (\Sigma_{Lb})^{-1} (AX + W); \quad (3.32)$$

$${}_{3q} \mathbf{n}_1 = -\sum \mathbf{n} \left( \sum \mathbf{L}_b \right)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{W}). \quad (3.33)$$

Na Colocação por Mínimos Quadrados, os valores a serem interpolados são formados por uma parte sistemática e por uma parte aleatória, então (MORITZ, 1972, p. 38):

$${}_{3p} \mathbf{T}_1 = {}_{3p} \mathbf{D}_{uu} \mathbf{X}_{a1} + {}_{3p} \mathbf{s}_1, \quad (3.34)$$

onde D é a matriz de coeficientes que expressa o efeito dos parâmetros  $X_a$  nos valores de T. Esta matriz é similar à matriz A, com a diferença de que a matriz D é formada com base nas coordenadas dos p pontos de cálculo.

A matriz A das derivadas parciais e o vetor W vem da equação (2.4). Cada estação  $P_i$  pode gerar uma sub-matriz  $A_i$  e um sub-vetor  $W_i$  os quais são dados, respectivamente, por (COSTA, 2003, p. 37):

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{z}_i & \mathbf{y}_i & \mathbf{x}_i \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{z}_i & 0 & -\mathbf{x}_i & \mathbf{y}_i \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{y}_i & \mathbf{x}_i & 0 & \mathbf{z}_i \end{bmatrix}; \quad (3.35)$$

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i \\ \mathbf{y}_i - \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{z}_i - \mathbf{Z}_i \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

A composição final da matriz A e do vetor W é feita para todas as estações comuns. Eles podem ser obtidos, respectivamente, pela concatenação de todas as sub-matrizes  $A_i$  e de todos os sub-vetores  $W_i$ .

Assim como no caso do ajustamento, também é possível obter uma estimativa da variância *à posteriori*  $\hat{\sigma}_0^2$  para a colocação, a qual é dada por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\mathbf{S}}, \quad (3.37)$$

onde o vetor v é estimado pela equação (3.28), o peso P dado pela equação (3.22) e a redundância S do modelo pode ser obtida por:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{n} - 7. \quad (3.38)$$

Testes estatísticos também podem ser aplicados para avaliar a qualidade das estimativas obtidas pela colocação. Na seção 4.4 deste trabalho será aplicado o teste global. O leitor interessado em maiores detalhes sobre a

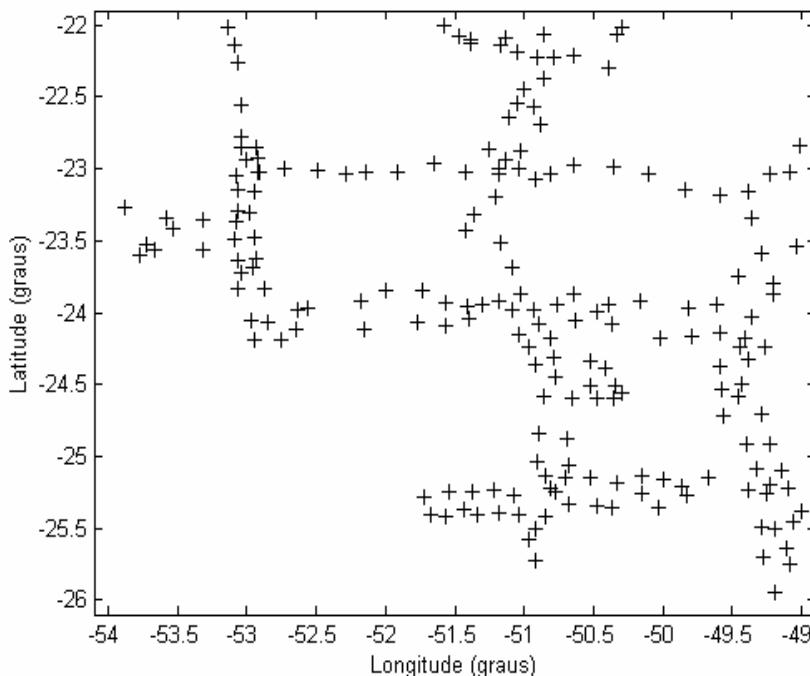
aplicação de testes estatísticos em colocação deve consultar (KRAKIWSKY e BIACS, 1990).

## 4. IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.1. Área de Estudo e Pontos de Controle

A área de estudo selecionada para a realização dos ensaios contidos neste trabalho serviu para testar e avaliar a metodologia proposta. Neste ensaio, foram utilizadas as coordenadas de 200 vértices pertencentes à Rede Planimétrica do SGB contidas nas duas últimas realizações deste sistema, denominadas de SAD69 e SAD69/96. A Figura 4.1 mostra a área de estudo com as estações do SGB.

Figura 4.1 – Área de estudo com as estações do SGB.



A avaliação dos resultados obtidos pôde ser feita pela comparação das diferenças entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência conhecidos. Em cada estimativa um ponto foi retirado e serviu como ponto de predição, de forma que todos os  $n$  pontos participaram como pontos de predição sendo um a cada estimativa. Cada ponto de predição

retirado não participou do processo de parametrização e foi testado individualmente, tornando possível a utilização de um total de ( $n - 1$ ) pontos de observação e 1 ponto para teste em cada estimativa.

#### 4.2. Processamento dos Dados do Experimento

O processamento dos dados para a geração dos resultados mostrados neste trabalho foi realizado utilizando-se rotinas desenvolvidas em ambiente MATLAB. Os arquivos de entrada e de saída, assim como os arquivos contendo os códigos são em formato texto com a extensão “m”, compatíveis com o MATLAB.

Duas estratégias de processamento foram utilizadas para compor o experimento. Em uma primeira estratégia, utilizou-se o ajustamento com aplicação do método paramétrico e, para a segunda estratégia, os resultados foram obtidos pela aplicação da colocação, a qual foi descrita na seção 3 deste trabalho.

Nas duas estratégias utilizadas, arbitrou-se um valor unitário para a variância a *priori*  $\sigma_0^2$ , de forma que  $\sigma_0^2 = 1$ . No caso do ajustamento, nenhuma informação necessária à valorização da matriz peso P foi disponibilizada. Assim considerou-se todas as observações como não correlacionadas e oferecendo o mesmo grau de confiança com uma variância unitária. Desta forma, a matriz P além de ser diagonal, se degenera na matriz identidade.

A MVC das observações para a colocação foi estimada pela equação (3.18) e a MVC do sinal  $s'$  foi estimada pela função covariância Gaussiana dada pela equação (3.8). Também a MVC do sinal s e a matriz covariância cruzada entre s e  $s'$  foram estimadas pela função covariância Gaussiana modelada a partir dos dados.

Os resultados do experimento são apresentados para o ajustamento e para a colocação. Para estas duas estratégias, a transformação de similaridade a sete parâmetros foi aplicada para estimativa dos parâmetros entre o SAD69 e o SAD69/96.

Com o objetivo de avaliar a qualidade global das estimativas, foi feita uma análise estatística tanto dos resultados do ajustamento quanto dos resultados da colocação pela aplicação do teste Qui-Quadrado.

#### 4.3. Modelagem Numérica da Função Gaussiana

A função covariância foi modelada por meio de uma regressão dos dados para as covariâncias estimadas, o que possibilitou a estimativa dos parâmetros da função. Para cada distância, existe uma covariância associada e dada nas três componentes X, Y e Z.

A Tabela 4.1 mostra os parâmetros da função covariância Gaussiana estimados pelo MMQ e dado nas três componentes X, Y e Z.

Tabela 4.1 – Parâmetros da Função Covariância Gaussiana.

Parâmetros	Componente X	Componente Y	Componente Z
$C_0 (m^2)$	0.290618	0.490893	0.872883
$a (km^{-1})$	0.009528	0.014383	0.011890

As Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 mostram a função covariância Gaussiana modelada a partir das covariâncias amostrais estimadas pela equação (3.24). As distâncias  $\Delta$  no eixo das abscissas X são dadas em km e as covariâncias amostrais correspondentes são dadas em  $m^2$  e estão representadas pelo símbolo “+”. A curva representada pela linha cheia é a função covariância da equação (3.8), cujos parâmetros são mostrados na Tabela 4.1. O valor da ordenada onde a curva intercepta o eixo Y é o próprio valor de  $C_0$  correspondente a variância do sinal  $C_s(0)$  e a constante “a” fornece a forma da curva interpolada, isto é, fornece o decaimento da função.

Figura 4.2 – Função Covariância para a componente X.

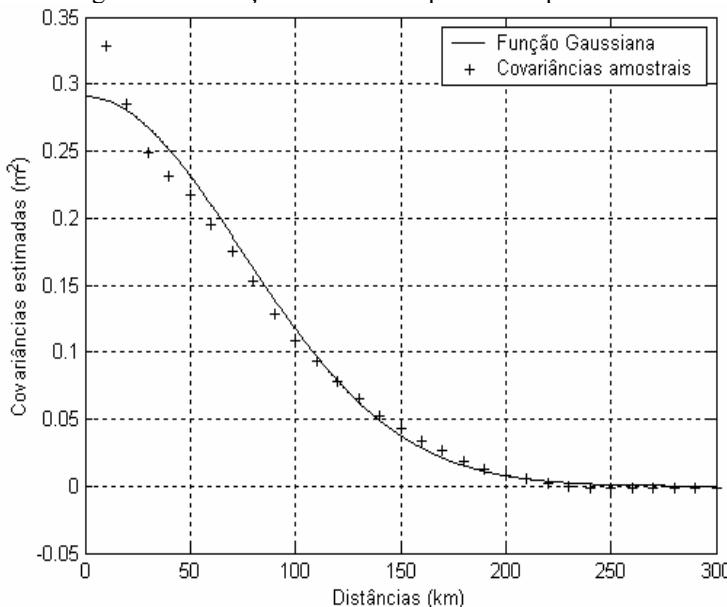


Figura 4.3 – Função Covariância para a componente Y.

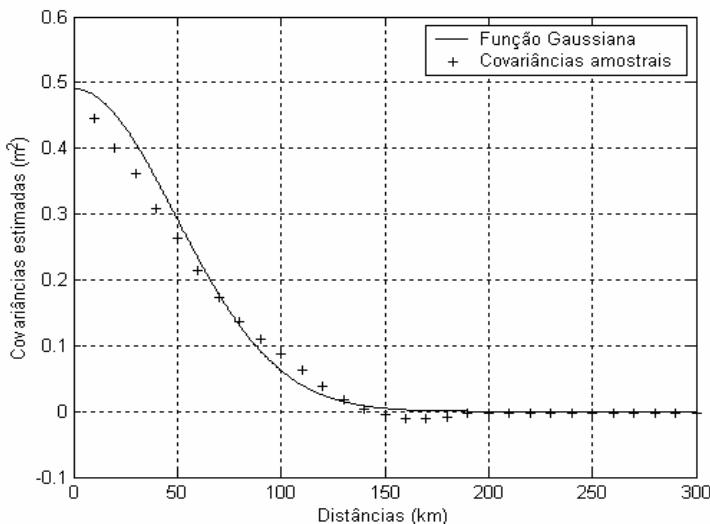
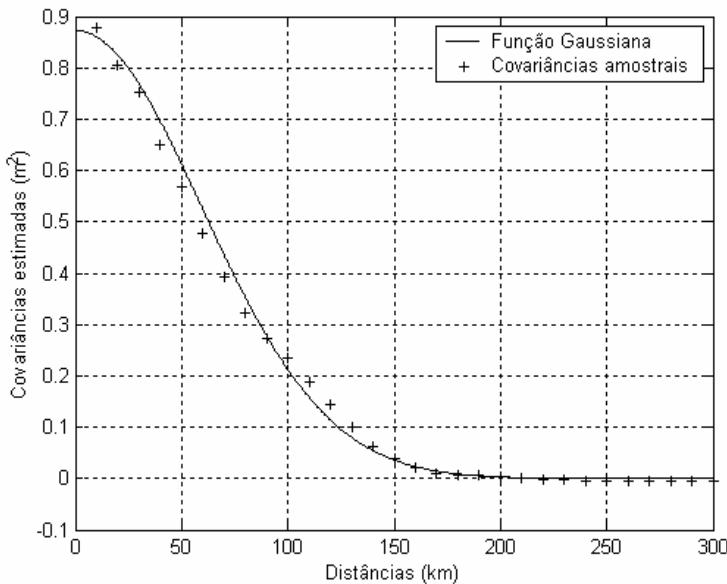


Figura 4.4 – Função Covariância para a componente Z.



#### 4.4. Parâmetros da Transformação Geométrica

O modelo matemático de transformação foi dado na seção 2 e consiste da transformação de similaridade a sete parâmetros, a qual foi utilizada para estimativa dos parâmetros entre o SAD69 e o SAD69/96. Os dados que entraram para compor o experimento são as coordenadas de 200 pontos da RGB, cuja área foi mostrada na seção 4.1. Duas estratégias de processamento foram utilizadas onde os resultados foram obtidos tanto por ajustamento quanto por colocação para efeitos de comparação.

A relação entre as duas referidas realizações do SGB foi estabelecida por três translações, três rotações e uma diferença de escala. No processo de estimativa, a matriz P do ajustamento foi assumida igual a matriz identidade e a MVC das observações para a colocação foi estimada pela função covariância modelada a partir dos dados. A Tabela 4.2 mostra os sete parâmetros estimados entre o SAD69 e o SAD69/96 para a área de estudo.

Tabela 4.2 – Parâmetros do ajustamento e da colocação.

Ajustamento		Colocação	
Parâmetros	Precisão	Parâmetros	Precisão
$x_0$ (m)	5.686083	$\pm$ 3.784043	3.438085
$y_0$ (m)	-5.924692	$\pm$ 2.866645	-4.930011
$z_0$ (m)	-2.581202	$\pm$ 4.098376	-7.907040
$\varepsilon_x$ (arcseg)	0.149701	$\pm$ 0.111976	0.563985
$\varepsilon_y$ (arcseg)	0.172066	$\pm$ 0.123893	-0.059135
$\varepsilon_z$ (arcseg)	0.082678	$\pm$ 0.115320	-0.154738
$\delta$ (ppm)	-1.334058	$\pm$ 0.406863	-1.348811
			$\pm$ 0.937157

Uma análise a respeito das diferentes soluções para o ajustamento e para a colocação é feita por COSTA (2003), como mostra a Tabela 4.2. Esta diferença nas duas soluções é atribuída à correlação do sinal, que por sua vez se propaga na MVC das observações como mostra a equação (3.18).

#### 4.5. Análise Estatística

A análise estatística utilizada para avaliar a qualidade das estimativas obtidas pelo ajustamento e pela colocação foi feita pelo teste global baseado na distribuição  $\chi^2$ . O nível de significância utilizado foi  $\alpha = 5\%$  e o valor dos graus de liberdade foi calculado pela equação (3.38) fornecendo  $S = 593$ .

A Tabela 4.3 mostra a análise estatística para as estimativas dadas na Tabela 4.2, onde a forma quadrática  $v^T.P.v$  foi estimada pela equação (3.12) e a variância à *posteriori*  $\hat{\sigma}_0^2$  pela equação (3.37).

Tabela 4.3 – Análise estatística pelo teste global unilateral.

Elementos	Ajustamento	Colocação
$v^T.P.v$	366.597	364.570
S	593	593
$\hat{\sigma}_0^2$	0.618	0.615
$\chi_c^2$	366.597	364.570
$\chi_t^2$ (593 ; 0.95)	650.760	650.760

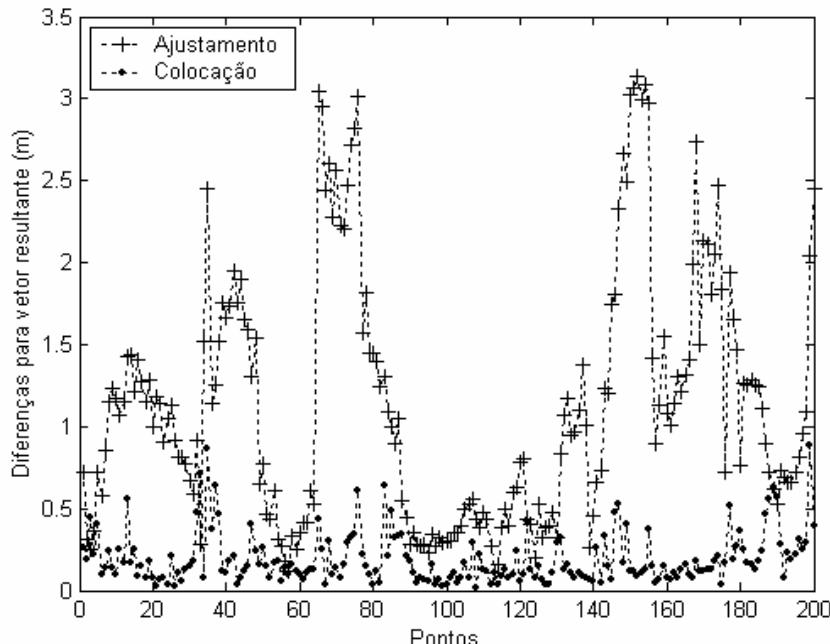
O valor de Qui-Quadrado  $\chi_c^2$  baseado na forma quadrática foi comparado com o Qui-Quadrado  $\chi_t^2$  teórico obtido a partir dos valores de  $\alpha$  e S. Após esta comparação conclui-se que a hipótese básica  $H_0$  é aceita para  $\alpha = 5\%$ , isto é, as variâncias *a priori*  $\sigma_0^2$  e à *posteriori*  $\hat{\sigma}_0^2$  são estatisticamente iguais para  $\alpha = 5\%$ .

#### 4.6. Análise do Vetor Resultante das Diferenças

Os resultados obtidos após a estimativa das coordenadas nos pontos de predição puderam ser avaliados mediante a comparação das diferenças entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência conhecidos.

As análises podem ser dadas tanto para as diferenças  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  e  $\Delta Z$  quanto para as diferenças  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  e  $\Delta h$ , as quais mostram a contribuição de cada componente na posição tridimensional dos pontos analisados. Uma outra comparação foi feita para o vetor resultante das diferenças entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência conhecidos.

Figura 4.5 – Diferença posicional para ajustamento e colocação.



A Figura 4.5 mostra os vetores resultantes das diferenças entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência conhecidos. Observa-se que para o caso do ajustamento, existem valores que ultrapassam a 3m enquanto que pela colocação as diferenças máximas são submétricas, isto é, no nível do ruído.

A partir dos 200 pontos analisados, apenas 4 mostraram vetores com diferenças maiores para a colocação, em comparação com o ajustamento. Este resultado mostra que na maioria dos casos, as coordenadas estimadas pela colocação se aproximam mais dos valores de referência, em comparação com as coordenadas estimadas pelo ajustamento.

## 5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os parâmetros da transformação geométrica estimados, para a colocação e para o ajustamento, entre as duas realizações do SGB consideradas são numericamente diferentes conforme mostra a Tabela 4.2. As diferentes soluções para os parâmetros são obtidas devido às diferentes composições para a MVC das observações nas duas estratégias utilizadas.

As diferenças obtidas entre as coordenadas estimadas pela colocação e os valores de referência conhecidos nos pontos de predição ficaram ao nível

do ruído e são menores quando comparadas com aquelas obtidas pelo ajustamento, isto é, na maioria dos casos para a área de estudo, as coordenadas estimadas pela colocação nos pontos de predição se aproximaram mais dos valores de referência em comparação com o ajustamento. Esta melhoria introduzida pela colocação é atribuída ao efeito da correlação na MVC das observações.

A função covariância Gaussiana modelada a partir dos dados apresentou um bom desempenho considerando os resultados obtidos com a colocação. Desta forma, o método de colocação pode ser aplicado em problemas de transformação de coordenadas, visto que tanto os parâmetros quanto as componentes do sinal s são estimados de forma simultânea no mesmo modelo matemático.

As variâncias *a priori* e *a posteriori* tanto para o ajustamento quanto para a colocação são estatisticamente iguais ao nível de significância de 5%.

Fundamentado nas análises deste trabalho, recomenda-se realizar estudos de outros modelos para a função covariância e analisar o seu desempenho quando aplicada na modelagem de distorções sistemáticas.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, R. C. ; DAVENPORT, J. A. e JEKELI, C. *Determination of Gravity Data Spacing Required For Inercial Navigation*. *Navigation*, vol. 47, Nº 1, pp. 1 a 6, 2000.
- ARGESEANU, V. *Three Dimensional Adjustment of a Terrestrial Geodetic Network – A Collocation Solution*. Department of Civil Engineering and Surveying, the University of Newcastle. *Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying*, Nº 44, pp. 1-37, june, 1986.
- BIAN, S. e MENZ, J. *Determining the parameter of a covariance function by analytical rules*. *Zeitschrift Für Vermessungswesen* 124. Jahrgang – Heft 7 – jahrgang, 1999.
- CAMARGO, P. O. e DALMOLIN, Q. *Correção da Deformação do Filme por Colocação*. Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1995.
- COSTA, M. F. *Modelagem da Função Covariância para Transformação de Referenciais Geodésicos por Colocação*. Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Tese de Doutorado. Curitiba, 2003.
- GELB, A.; KASPER JR., J. F. ; NAS JR., R. A. ; PRICE, G. F. e SUTHERLAND JR., A. A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, MA, MIT, 1974.
- GEMAEL, C. *Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia*. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1981.

- GEMAEL, C. *Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas*. Editora da UFPR, Curitiba, 1994.
- JAZWINSKI, A. U. *Stochastic processes and filtering theory*. New York, Academic, 1970.
- KAOURAS, M. *On the Detection of Outliers and the Determination of Reliability in Geodetic Networks*. Technical Report Nº 87, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1982.
- KRAKIWSKY, E. J. *A synthesis of advances in the Method of Least Squares*. Lecture note Nº 42, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1975.
- KRAKIWSKY, E. J. e BIACS, Z. F. *Least Squares Collocation and Statistical Testing*. *Bulletin Geodesique*, 64, pp.73-87, 1990.
- KRAUS, K. e MIKHAIL, E. M. *Linear Least Squares Interpolation. Photogrammetric Engineering*, october, 1972.
- LAMBECK, K. *The relation of some geodetic datums to a global geocentric reference system*. *Bulletin Geodesique*, No 99, 1971.
- LUGNANI, J. B. *Introdução à Fototriangulação*. Editora UFPR. Curitiba, 1987.
- MIKHAIL, E. M. *Observations and Least Squares*. University Press of America, New York, 1976.
- MORITZ, H. *Advanced Least Squares Methods*. Report Nº 175, The Ohio University, Research Foundation. Columbus, 1972.
- MORITZ, H. *Determination of the gravity field by Collocation*. *Bollettino di Geodesia e Scienze affini*, Anno XXXII, Nº 1, 1973.
- MORITZ, H. *Covariance Functions in Least Squares Collocation*. Report Nº 240, The Ohio University, Department of Geodetic Science. Columbus, 1976.
- MORITZ, H. *Least Squares Collocation. Reviews of Geophysics and Space Physics*, Vol. 16, Nº 3, 1978.
- MORITZ, H. e SÜNKEL, H. *Approximation Methods in Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag. Karlsruhe, 1978.
- MORITZ, H. *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe. Karlsruhe, 1980.
- RAMPAL, K. K. *Least Squares Collocation in Photogrammetry. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 1976
- SCHWARZ, K. P. *Combination of Spatial Networks Using an Estimated Covariance Matrix*. *Bulletin Geodesique*, vol. 68, No 3, p. 168-172, 1974.
- THÉRIAULT, Y. *Filtrage par Collocation: Application au Changement de Système de Référence Géodésique*. Service des technologies à référence spatiale Secteur des terres, ministère des Ressources naturelles, Québec. *Geomatica*, vol 49, Nº 2, pp. 213 a 221, 1995.

TORGE, W. *Geodesy*. 3 rd Edition. Walter de Gruyter. Berlin, 2001.

VINCENTY, T. *Transformation of coordinates between geodetic systems.*  
*Survey Review*, vol. 18, No 137, p. 128-133, 1965.

(Recebido em março/07. Aceito em março/08)